Автоматика и телемеханика, № 7, 1998

Моделирование поведения и интеллекта

УДК 519.816

© 1998 г. **О.И. ЛАРИЧЕВ, академик РАН,**
М.Ю. СТЕРНИН
(Институт системного анализа РАН, Москва)

ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ[1]

Рассматривается проблема поиска решения многокритериальной задачи о назначениях: определение и выбор наиболее близких по своим характеристикам пар элементов, принадлежащих двум множествам. Решение этой проблемы проводится с учетом предпочтений лица, принимающего решение, относительно качества назначений и основано на анализе характеристик двух множеств элементов, оцениваемых по многим критериям. Разработана система поддержки принятия решений многокритериальной задачи о назначениях. Система позволяет в диалоге с лицом, принимающим решение, анализировать исходные данные, формировать область допустимых решений, определять наилучшие назначения и выявлять лучшее из множества возможных решений при заданных ограничениях.

1. Введение

Среди задач управления организациями весьма распространенной является задача распределения прав, обязанностей, работ, благ между членами коллектива, в решении которой участвует руководитель, ответственный за это распределение.

Рассмотрим практические примеры.

Выпускники военной академии получают назначения на места службы [1, 2]. Каждый офицер имеет определенные пожелания к месту службы. В свою очередь, каждое место службы предъявляет определенные требования к офицеру. Желательно заполнить все вакантные места. Необходимо найти наилучшие (с точки зрения обеих сторон) назначения.

Через отдел подготовки рукописей крупного издательства проходит множество рукописей книг. Эти рукописи необходимо распределять между сотрудниками. Каждая рукопись может быть охарактеризована оценками по таким критериям как важность, срочность выполнения, тематика. В свою очередь, сотрудники могут быть охарактеризованы оценками по таким критериям, как качество работы, индивидуальная “пропускная способность”, предпочитаемая тематика и т.д. [3]. Необходимо распределить рукописи среди сотрудников так, чтобы получить приемлемое качество выполнения всех работ при минимальных ресурсных затратах.

[1]Исследования частично поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований, № 98-01-00086, № 96-01-01621, № 96-15-96155.

2. Пример постановки многокритериальной задачи о назначениях

Дальнейшее изложение будет иллюстрироваться следующим примером.

Рассмотрим задачу назначения трех сотрудников организации на три вакантные должности. Претендент на каждую должность обязан соответствовать определенным требованиям. С другой стороны, руководитель стремится предоставить каждому сотруднику должность, соответствующую его возможностям.

Предположим, что эксперты совместно с руководителем, ответственным за назначения, разработали следующие критерии для оценки соответствия субъектов (назначаемых) и объектов (должностей).

Профессиональная подготовленность:

1. Высокая.
2. Удовлетворительная.

Умение руководить коллективом:

1. Хорошее.
2. Удовлетворительное.

Практический опыт:

1. Большой.
2. Небольшой.
3. Отсутствует.

Приведем для примера формулировку оценок на "зеркальных" шкалах критерия "Профессиональная подготовленность".

Шкала требований:

1. Требуются работники с высокой профессиональной подготовкой.
2. Достаточна удовлетворительная профессиональная подготовка.

Шкала возможностей:

1. Претендент обладает высокой профессиональной подготовкой.
2. Профессиональная подготовка претендента удовлетворительна.

Предположим, что эксперты охарактеризовали возможности субъектов следующими оценками по выбранным критериям:

$C_1 = (2;1;2)$; $C_2 = (2;2;2)$; $C_3 = (2;2;3)$.

Цифры в скобках обозначают номера вербальных оценок на приведенных выше шкалах критериев.

Например, второй субъект (C_2) имеет удовлетворительную профессиональную подготовку, удовлетворительное умение руководить коллективом и небольшой практический опыт.

Характеристики объектов:

$O_1 = (1;1;2)$; $O_2 = (2;1;2)$; $O_3 = (2;2;2)$.

Эти характеристики выражают должностные требования. Так, для занятия должности O_2 требуется субъект, для которого достаточно иметь удовлетворительную профессиональную подготовку, необходимо хорошее умение руководить коллективом, достаточен небольшой практический опыт. Возникает вопрос: как найти наилучшее решение задачи о назначениях в данных условиях?

3. Постановка многокритериальной задачи о назначениях

Дадим общую постановку многокритериальной задачи о назначениях (МЗН).

Имеются два исходных множества по n элементов в каждом.

Обозначим:

$\mathrm{C} = \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_i, \ldots, \mathrm{C}_n\}$ – первое множество, элементы которого назовем субъектами;

$\mathrm{O} = \{\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \ldots, \mathrm{O}_j, \ldots, \mathrm{O}_n\}$ – второе множество, элементы которого назовем объектами.

Имеется $\mathrm{K} = \{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$ – множество критериев оценки субъектов и объектов.

Каждая оценка на шкале критерия имеет две формулировки, отражая взаимные требования и возможности элементов двух множеств. Шкалы критериев – порядковые, с небольшим, как правило, числом оценок, упорядоченных от лучшей к худшей. Лучшая оценка имеет ранг, равный единице. Оценки могут быть как словесные, так и численные. (Заметим, что для многокритериальной задачи о назначениях шкалы словесных оценок наиболее характерны. Иллюстрацией могут служить приведенные выше примеры.)

Часть критериев отражает требования субъектов и возможности объектов, другая часть – требования объектов и возможности субъектов по их удовлетворению.

Введем следующие обозначения:

T_{ikp} – p-я по порядку оценка на шкале требований i-го элемента по k-му критерию;

V_{jut} – t-я оценка на шкале возможностей j-го элемента по u-му критерию.

Назовем критериальным соответствием различие по одному из критериев между требованиями субъекта (объекта) и возможностями объекта (субъекта).

Требования i-го элемента по k-му критерию (T_{ikp}) удовлетворены возможностями j-го элемента по k-му критерию (V_{jkt}), если $p \geqslant t$. При этом критериальное соответствие идеально.

Назовем назначением любую пару $\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\}$, образованную двумя элементами, принадлежащими разным исходным множествам.

Имеется множество из $(n \times n)$ назначений $\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, для двух исходных множеств по n элементов C и O.

Идеальным назначением назовем пару $\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\}$, для которой взаимные требования полностью удовлетворены по всем критериям, т.е. все КС идеальны.

Заметим, что количество возможных решений для исходных множеств C и O, равно $n!$, что и определяет (в общем случае) существенные трудности при решении МЗН большой размерности. Назовем решением МЗН перестановочную матрицу [4] MS $(n \times n)$, единичные элементы которой соответствуют назначениям, формирующим решение, а остальные элементы равны нулю.

Идеальным решением назовем решение МЗН, все назначения которого идеальны.

Назовем руководителя, ответственного за решение задачи, лицом, принимающим решение (ЛПР).

Предположим, что назначения могут быть проранжированы (нестрого упорядочены), т.е. каждому возможному назначению может быть присвоен ранг, отражающий его качество с точки зрения ЛПР, при этом ранги разных назначений могут совпадать. Тогда любое решение МЗН может быть охарактеризовано совокупностью рангов отдельных назначений, сформировавших решение.

Назовем эффективным решение МЗН, в котором нельзя улучшить качество одних назначений без ухудшения качества других.

Теперь можно сформулировать МЗН в следующем виде.

Дано:

– два множества, состоящих из элементов C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и O_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$;

– оценка каждого элемента множеств по N критериям $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$.

Требуется:

– на основе предпочтения ЛПР определить и выбрать из множества эффективных решений такое, для которого сумма рангов, лучших по качеству S назначений $(S \leqslant \leqslant n)$, минимальна.

Похожие по постановке задачи рассматривались в работах [5–11].

Впервые задача в наиболее близком по постановке виде была сформулирована в работе [9]. В ней используется приведенный выше критерий оптимальности. Дан алгоритм решения задач малой размерности. Его применение позволило решить практическую задачу [3]. Доказана теорема о существовании решения в случае, когда построенные ЛПР относительные ранжировки (для каждого субъекта и объекта) непротиворечивы. Даны статистические оценки сложности ряда задач выявления предпочтений ЛПР.

Однако, алгоритмы, предложенные в [9–11], не позволяют решать задачи средней и большой размерности. Требуют дополнительного уточнения и корректировки способы выявления предпочтения ЛПР. Современные подходы к решению подобных задач требуют создания систем поддержки принятия решений (СППР). Этим проблемам посвящена данная статья.

4. Типы задач о назначениях

В рамках сформулированной МЗН содержатся несколько существенно отличающихся по своим особенностям типов задач, требующих различных подходов к их решению.

Для наших целей удобно воспользоваться двумя основаниями классификации задач о назначениях, отражающими характер задачи и ее размерность.

Будем различать по характеру уникальные задачи, для которых решение каждой новой задачи требует осуществления всего комплекса подготовки исходных данных заново (разработка критериев, шкал и проведение экспертных оценок) и повторяющиеся МЗН, требующие периодического решения с одним и тем же набором критериев, но различающиеся составом субъектов, объектов и набором экспертных оценок.

Другим основанием классификации служит размерность МЗН.

В приведенном выше примере нетрудно перебрать все возможные назначения, сравнить их между собой и выбрать лучшие. Ясно, что такая возможность существует при небольшом количестве элементов двух множеств и малом числе критериев.

Однако, в задачах о назначениях количество элементов может меняться от десятков до тысяч и число критериев – от 3–4 до 10 и более, при этом количество оценок на шкалах, как правило, 3–5 и почти никогда не превышает 10 [1, 3].

В связи с этим, для каждого из классов уникальных и повторяющихся задач целесообразно различать следующие типы МЗН, отличающиеся размерностью своих характеристик:

Тип МЗН	Количество элементов	Число критериев, оценок на шкалах
A	Небольшое	Малое
B	Небольшое	Большое
C	Большое	Малое
D	Большое	Большое

Далее будут изложены подходы, методы и способы решения, применяемые в системе поддержки принятия решения МЗН (СППР МЗН) для решения различных типов задач. Предварительно рассмотрим проблемы, общие для СППР, предназначенной для поддержки решения многокритериальных задач о назначениях.

5. Основные алгоритмы решения многокритериальной задачи о назначениях

Существенные трудности, с которыми связан процесс поиска решения рассматриваемой задачи, заключаются в многокритериальности, необходимости рассматривать задачи достаточно большой размерности и в стремлении построить такой метод решения, при реализации которого требуемая от ЛПР информация соответствовала бы возможностям системы переработки информации человеком.

Назовем матрицей назначений матрицу M размерностью $(n \times n)$, элементами которой являются ранги назначений.

Предлагаемый подход к решению МЗН основан на поиске ответов на два основных вопроса:

1) как определить ранги всех возможных назначений в матрице назначений M $(n \times n)$;

2) как, зная ранги, найти решение, соответствующее введенному выше критерию оптимальности.

Ответ на первый вопрос будет получен при наличии способа определения соответствия между характеристиками объекта и субъекта. В свою очередь, целостное соответствие будет зависеть от определения критериального соответствия. Далее будем использовать три способа ранжирования назначений и определения целостного соответствия характеристик объекта и субъекта.

1. Формальное соответствие. При этом способе на основе характеристик элементов формально рассчитывается индекс соответствия характеристик объекта и субъекта. Этот формальный индекс используется вместо индекса, основанного на предпочтениях ЛПР, в качестве ранговых показателей в матрице назначений.

2. Относительное соответствие. При этом способе на основе предпочтений ЛПР ранжируются по качеству назначений все субъекты по отношению к каждому из объектов и все объекты по отношению к каждому из субъектов. Суммы соответствующих рангов для пары объект – субъект используются как индексы соответствия и формируют матрицу назначений.

3. Абсолютное соответствие. При этом способе на основе предпочтений ЛПР определяется ранг каждого из возможных назначений, т.е. каждой клетке матрицы назначений M $(n \times n)$ присваивается ранг, который рассматривается как индекс соответствия.

Легко увидеть связь способов определения индексов соответствия с введенными выше типами МЗН. Ясно, что формальный индекс удобно использовать при решении задач типа D и на первых этапах решения задач типа B и C. Как мы увидим далее, определение относительного индекса соответствия менее трудоемко для ЛПР. Этот способ удобно использовать для задач уникального характера, особенно типа C. Способ определения абсолютного индекса соответствия удобно использовать при повторяющихся задачах, особенно задачах типа B.

В процедуре поиска решения МЗН можно выделить следующие основные этапы:

1. Анализ исходных характеристик элементов двух множеств.
2. Формирование области допустимых решений.
3. Выявление предпочтений ЛПР.
4. Поиск окончательного решения МЗН.

Рассмотрим эти этапы подробнее.

5.1. Этап анализа данных и проверки существования идеального решения. Основной целью данного этапа является поиск идеального решения МЗН и выработка рекомендаций по выбору стратегии дальнейшего решения МЗН.

Вначале производится преобразование исходных данных, затем проверяется существование идеальных назначений, при которых взаимные требования пары “объект – субъект” полностью удовлетворены.

Идеальные назначения формируют область поиска идеального решения МЗН. Если удается найти n идеальных пар, доставляющих полное решение задачи, то это означает, что идеальное решение МЗН, удовлетворяющее всем требованиям, получено без вмешательства ЛПР, и анализ проблемы закончен.

5.1.1. Формальный индекс соответствия. На данном этапе используется формальный индекс соответствия, вычисляемый на основе исходных данных без участия ЛПР.

Формально отношения между элементами двух множеств (субъектов и объектов) могут быть охарактеризованы вектором соответствия R_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, k-я компонента которого отражает степень соответствия характеристик элементов по k-му критерию.

Таким образом, на этапе анализа данных эквивалентом понятия "критериальное соответствие по k-му критерию" является компонента вектора соответствия, которая подсчитывается следующим образом:

$$(1) \qquad R_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } T_{ikp} \leqslant V_{jkq} \quad (p \geqslant q), \\ r_k, & \text{если } T_{ikp} > V_{jkq}, \end{cases}$$

здесь T_{ikp} – требование i-го элемента одного множества (субъекта или объекта), выражаемое p-й по порядку оценкой на шкале требований по k-му критерию; V_{jkq} – соответствующие возможности j-го элемента другого множества, выражаемые q-й оценкой на шкале возможностей того же k-го критерия; r_k – количество оценок на шкале k-го критерия, на которое требования превышают возможности.

Поскольку оценки на шкале имеют две формулировки и упорядочены от лучшей к худшей, то $R_{ijk} = 0$, если $p \geqslant q$, где p, q – номера оценок на шкалах требований и возможностей k-го критерия. Таким образом, условие $R_{ijk} = 0$ означает, что требования по k-му критерию удовлетворены, а $R_{ijk} > 0$ означает неудовлетворенность предъявленных требований.

Введенное таким образом определение критериального соответствия отражает тот факт, что любое превышение требований над возможностями будет учитываться в дальнейшем анализе в соответствии только со степенью такого превышения по каждому из критериев – r_k, которое на данном этапе эквивалентно понятию качества критериального соответствия.

С другой стороны, если требования по k-му критерию удовлетворены, то по определению, критериальное соответствие является идеальным и обладает наивысшим качеством.

В то же время для стадии анализа, на которой происходит поиск идеального решения МЗН, важен лишь факт, указывающий на то, что возможности удовлетворяют (или превышают) выдвинутые требования, а степень удовлетворения требований несущественна. Поэтому естественно принять, что оценки возможностей, превышающие уровень удовлетворения требований, являются "одинаково хорошими", поскольку позволяют отнести назначение с идеальными по каждому критерию критериальными соответствиями к идеальному назначению.

Множество векторов соответствия R_{ij} образует $(n \times n)$ таблицу сходства, в клетке (i, j) которой помещен вектор соответствия между субъектом C_i и объектом O_j.

5.1.2. Ускоренный поиск решения. Для поиска идеального решения МЗН предлагается процедура ускоренного поиска решений. В этой процедуре для каждого вектора соответствия R_{ij} формируется агрегированный критерий – свертка вектора соответствия.

Введем следующие обозначения элементов свертки вектора соответствия: значение 0 соответствует паре с полностью взаимно удовлетворенными требованиями по всем критериям, 1 – не удовлетворено одно из требований, причем степень неудовлетворенности соответствует одной градации шкалы, 2 – не удовлетворено одно из требований на две градации шкалы, либо два различных требования – на одну градацию каждое и т.д.

Предполагая равноценность компонентов вектора соответствия и их шкал, значение свертки вычисляют как сумму степеней отклонения по каждому из компонентов вектора соответствия.

Введем обозначение G_{ij} для формального индекса соответствия. Тогда суммарная величина критериальных соответствий $G_{ij} = \Sigma(R_{ijk})$, $k = 1, 2, \ldots, N$, при сделанных выше предположениях, может служить формальным индексом качества назначения, которое является наилучшим при $G_{ij} = 0$ (идеальное назначение) и ухудшается с возрастанием величины G_{ij}.

Введем понятие качества назначения $\{C_i, O_j\}$ как функции вектора соответствия R_{ij}, формирующего назначение, обозначим ее $F(\{C_i, O_j\})$ и сделаем следующие предположения относительно свойств этой функции:

– максимум функции $F(\{C_i, O_j\})$ достигается для идеального назначения, при этом значение индекса $G_{ij} = 0$;

– минимум функции $F(\{C_i, O_j\})$ достигается в том случае, когда G_{ij} максимально;

– качество назначения увеличивается при уменьшении G_{ij}.

Следствием предположения о равной важности критериев и их шкал является вывод о том, что существует единая шкала качества назначений, при этом назначения, имеющие одинаковое значение величины свертки, равноценны, т.е. обладают равным качеством.

Таким образом, в рамках сделанных на данном этапе предположений, качество назначения монотонно меняется с изменением величины свертки.

Для поиска идеального решения МЗН воспользуемся решением однокритериальной задачи о назначениях (ЗН) на множестве элементов матрицы формальных индексов соответствия.

Решение ЗН, полученное для минимума суммы значений агрегированных критериев (максимизирующее суммарное качество назначений), является идеальным решением МЗН, если минимум равен нулю. Формальной оценкой качества решения может служить величина достигнутого минимума, отражающая суммарное качество назначений, входящих в окончательное решение.

Проиллюстрируем применение процедур этого этапа на приведенном выше примере.

Исходные данные – оценки по критериям трех субъектов и трех объектов можно представить в следующем виде:

		Критерии		
		K_1	K_2	K_3
Субъекты	C_1	2	1	2
	C_2	2	2	2
	C_3	2	2	3

		Критерии		
		K_1	K_2	K_3
Объекты	O_1	1	1	2
	O_2	2	1	2
	O_3	2	2	2

Векторы сходства и свертки, составленные из векторов соответствия, представлены в табл. 1 и 2.

Легко увидеть, что при заданных условиях существуют три идеальных назначения (векторы со всеми нулевыми компонентами):

$\{C_1 - O_2\}$; $\{C_1 - O_3\}$; $\{C_2 - O_3\}$.

Таблица 1

Объекты\Субъекты	C_1	C_2	C_3
O_1	100	110	111
O_2	000	010	011
O_3	000	000	001

Таблица 2

Объекты\Субъекты	C_1	C_2	C_3
O_1	1	2	3
O_2	0	1	2
O_3	0	0	1

Для того, чтобы проверить, возможно ли идеальное решение МЗН, сформируем матрицу формальных индексов соответствия. Приведенная выше таблица сходства (табл. 1), может быть представлена в виде матрицы свертки (табл. 2).

Воспользуемся решением однокритериальной задачи о назначениях на множестве элементов этой матрицы, минимизирующим сумму формальных индексов G_{ij}, при дополнительном условии поиска максимального количества идеальных назначений. Из решения ЗН следует, что в приведенном примере идеального решения МЗН не существует. Любое возможное решение ЗН для рассматриваемого примера включает, по меньшей мере, одно неидеальное назначение.

Например, решение $[\{C_1-O_2\},\{C_2-O_3\},\{C_3-O_1\}]$, включает назначение $\{C_3-O_1\}$, отличное от идеального $(G_{31}=3)$. Следовательно, для рассматриваемого примера процедуры поиска решения МЗН должны быть продолжены.

В диалоге ЛПР с системой выясняются основные характеристики рассматриваемой задачи, касающиеся уникальности и размерности задачи, мнение ЛПР относительно типа задачи и предлагаются те или иные стратегии поиска решения.

Ниже мы обсудим, каким образом ЛПР может воспользоваться рекомендациями выбора стратегии поиска решения МЗН в зависимости от характера и типа задачи.

5.2. Формирование области допустимых решений. Основными целями этапа являются: формирование области допустимых решений (ОДР) и выявление типичных вариантов решений, возможных для выбранной ОДР.

Для того, чтобы понять каких результатов можно достичь при заданных исходных данных, ЛПР необходимо иметь возможность быстро получить целостное представление о решаемой задаче. В работах [12, 13] была впервые описана СППР МЗН, позволяющая проводить ускоренный поиск решения.

Для помощи ЛПР в решении этой проблемы СППР МЗН предлагает набор индикаторов, отражающих целостные характеристики задачи и процедуру ускоренного поиска решений, быстрой “прикидки”, позволяющей увидеть, какого типа решения могут быть получены при конкретных исходных данных и выбранных ограничениях [12, 13].

Процедура ускоренного поиска решений проводится в рамках понятий и определений, введенных ранее.

В этой процедуре используется введенный выше формальный индекс соответствия G_{ij} и предполагается практическая равноценность равных по величине компонентов вектора соответствия.

Несмотря на грубость предположения о не слишком сильно различающихся важностях критериев и градаций их шкал, предъявление матрицы уровней взаимной удовлетворенности (элементами которой являются значения формального индекса соответствия) в значительной степени достигает цели, выполняя функцию представления общей ситуации.

Матрица остается обозримой для достаточно больших пространств, и при взгляде на нее ЛПР легко выделяет фрагменты и отдельные пары, требующие более пристального анализа. Выделенные фрагменты могут детально изучаться.

После просмотра матрицы свертки у руководителя появляется возможность изменить допустимую область поиска решений. Для этого СППР предлагает воспользоваться следующими возможностями:

– включать в окончательное решение определенные пары объект – субъект;

– вводить запрет на образование определенных пар;

– накладывать ограничение на допустимый уровень расхождения оценок по отдельным критериям;

– накладывать ограничение на допустимые значения величины свертки векторов соответствия.

ЛПР может формировать и более сложные логические требования к качеству решения. Примером может служить следующее правило.

Если по критерию k_1 возможности субъекта не ниже оценки q_1 и соответствующие требования объекта не выше p_1, а по критерию k_2 существует полная взаимная удовлетворенность, то:

включить такие пары субъект – объект в число потенциально возможных пар при поиске окончательного решения.

Основная идея ускоренного поиска вариантов решения заключается в том, что после введения ЛПР ограничений осуществляется поиск возможных решений классической однокритериальной задачи о назначениях на множестве разрешенных элементов. При этом минимизируется сумма G_{ij} и отыскивается решение с максимальным количеством наилучших назначений (сумма рангов лучших S назначений – минимальна).

Разработаны и используются достаточно быстрые алгоритмы, основанные на классических методах решения задачи о назначениях в исследовании операций [14], применение которых в СППР позволяет за приемлемое время помочь ЛПР в выявлении особенностей рассматриваемой задачи.

Обозначим MK матрицу размерностью $(n \times n)$, отличающуюся от матрицы решений тем, что на месте единиц в ней стоят значения формальных индексов соответствия образующих решение назначений.

Введем понятие качества решения МЗН, как функции совокупности назначений, формирующих решение МЗН, обозначим ее $\Phi(MS)$ и сделаем следующие предположения относительно свойств этой функции:

– максимум функции $\Phi(MS)$ достигается для идеального решения МЗН, которое формируется из идеальных назначений;

– качество решения МЗН увеличивается при возрастании качества назначений, формирующих это решение.

Принятые предположения о свойствах качества назначений и решения позволяют сделать вывод о том, что при данных предположениях решение однокритериальной задачи о назначениях является эффективным решением МЗН наиболее высокого качества, которое может быть достигнуто в заданной области допустимых решений.

Остается удовлетворить дополнительному условию, заключающемуся в отыскании среди решений равного качества решения с максимальным количеством наилучших назначений. Алгоритмы для решения этой проблемы подробно описаны в [12, 13].

Принципы, на которых основаны эти алгоритмы, заключаются в том, что, не ухудшая качества решения, последовательно выделяются максимально возможные группы назначений наивысшего качества, начиная с группы идеальных назначений.

Очевидно, что решение МЗН не теряет своих эффективных свойств и при введении дополнительного условия – получения в ОДР решения с максимально возможным количеством наилучших назначений.

Проиллюстрируем работу процедур формирования ОДР и поиска вариантов решений на приведенном выше примере.

Анализируя табл. 2, ЛПР может, например, принять решение о том, что назначение $\{O_1 - C_3\}$ недопустимо, так как степень взаимной неудовлетворенности элементов слишком велика. После введения запрета на формирование этого назначения система проверяет существование решения задачи в целом. Оно существует и не единственное. Одно из возможных решений имеет вид:

Решение 1. $[\{C_1 - O_1(1)\}, \{C_2 - O_3(0)\}, \{C_3 - O_2(2)\}]$.

В круглых скобках указаны значения G_{ij}, отражающие качество назначений.

При введении каждого ограничения система информирует ЛПР о том, возможно ли решение и если да, то какой тип решения возможен – сколько назначений и какого уровня неудовлетворенности может быть сделано в новой области допустимых решений. В приведенном выше простом примере после введения запрета на образование пары $\{O_1 - C_3\}$ возможны следующие варианты типовых решений:

Уровень неудовлетворенности	0	1	2
Решение 1	1	1	1
Решение 2	0	3	0

Первый тип решения соответствует критерию оптимальности, принятому для решаемой задачи (отыскать наилучшее решение с максимальным числом наилучших назначений). Одно из возможных решений первого типа приведено выше.

Второй тип решения, вариант которого также предъявляется ЛПР для анализа, соответствует условию, при котором в решение не включаются назначения наихудшего качества, имеющиеся в ОДР.

Анализируя предъявленную пару решений, ЛПР получает представление о рамках, в которых ему следует проводить формирование ОДР.

Стратегию формирования области допустимых решений ЛПР выбирает сам и обычно находит ее за приемлемое время, которое, конечно, зависит от его опыта и темперамента. Тем не менее, процесс поиска оказывается не только не утомительным, но часто и увлекательным, открывая ЛПР неожиданные для него типы решений, обусловленные конкретными исходными данными. Достаточно часто вначале этот процесс выглядит как случайный поиск области допустимых решений, который затем переходит в регулярный поиск ОДР в выбранной окрестности.

Следует еще раз подчеркнуть, что СППР МЗН предоставляет ЛПР практически неограниченные возможности в выборе подходящей ему стратегии поиска приближенного решения, т.е. в формировании ОДР.

На данном этапе ЛПР осуществляет выбор удовлетворяющего его типа решения на основе определенных целостных характеристик, таких как качество решения (величина достигнутого минимума при решении однокритериальной задачи о назначениях), количество идеальных назначений и распределение уровней неудовлетворенности (качества назначений) в окончательном решении.

Основными предположениями при этом остаются предположения о практической равноценности критериев и шкал их оценок, что может служить источником неудовлетворенности руководителя полученными вариантами конкретных решений, даже несмотря на то, что они формально удовлетворяют выбранному критерию оптимальности.

В тех случаях, когда ЛПР удовлетворяется полученным на этом этапе решением, проблема может считаться исчерпанной. Однако, как правило, руководитель стремится получить решение, более полно отвечающее его предпочтениям.

Поэтому на следующем этапе после формирования области допустимых решений, ЛПР стремится выразить свои предпочтения относительно качества назначений и осуществить упорядочение назначений на основе своих предпочтений.

5.3. Выявление предпочтений лица, принимающего решения. Решения МЗН, полученные на предыдущем этапе в рамках выбранной ОДР, не равнозначны для ЛПР даже в случае их кажущейся эквивалентности. Действительно, равные отклонения от идеального назначения по разным критериям могут иметь для ЛПР различную ценность – одни из этих отклонений могут быть, с точки зрения ЛПР, более существенны чем другие.

Основной целью этапа является выявление предпочтений ЛПР относительно качества назначений, возможных в области допустимых решений и упорядочение назначений по качеству на основе выявленных предпочтений.

Окончательное определение качества назначений основано на сравнении (в том или ином виде) ценности назначений для ЛПР.

Ответ на вопрос о том, насколько сложными для человека являются такие задачи сравнения, в определенной мере позволяют дать результаты статистического моделирования, приведенные в [9].

Результаты моделирования показывают, что с большой вероятностью ЛПР либо не нужно сравнивать векторы, либо сравнение осуществляется только по двум критериям. Известно, что операции сравнения объектов, отличающихся оценками по двум критериям, относятся к допустимым [15], и человек осуществляет их с малым количеством противоречий.

5.3.1. Основная процедура выявления предпочтений лица, принимающего решения. Предпочтения ЛПР служат основой для ранжировки назначений, т.е. соответствия возможностей различных субъектов (объектов) требованиям объектов (субъектов).

Наряду с введенным ранее понятием критериального соответствия как формально рассчитываемого индекса, далее будут использованы два понятия:

– КСо – критериальное относительное соответствие характеристики субъектов (объектов) по отношению к заданному объекту (субъекту) по k-му критерию, полученное в результате ранжирования соответствия характеристик выбранного субъекта (объекта), по отношению ко всем объектам (субъектам);

– КСа – критериальное абсолютное соответствие между любой парой объект – субъект по k-му критерию, полученное в результате попарного ранжирования назначений.

Для формального определения КСо назовем субъект (объект), по отношению к которому определяются КСо, опорным.

Определим понятие критериального соответствия КСо, как пару, объединяющую уровень требований опорного элемента назначения $\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\}$, например, i-го субъекта по k-му критерию (T_{ikp}), и значение соответствующего компонента вектора соответствия (R_{ijk}).

Тогда, по определению, критериальное соответствие назначения $\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\}$ по k-му критерию обозначим как $\text{КСо}_{ijk} = \{T_{ikp}, R_{ijk}\}$.

Формулировка понятия КСа, не связанная с конкретным назначением, такова: КСа – это пара, объединяющая p-е требование по k-му критерию и степень удовлетворения этих требований (т.е. разность r между номерами оценок на шкалах требований и возможностей данного критерия). Использование приведенной формулировки позволяет ввести для КСа по k-му критерию следующее обозначение:

$\text{КСа}_k^{pr} = \{T_{kp}, T_{kp} - V_{kq}\}$, здесь T_{kp}, V_{kq} – p-й и q-й номера оценок на шкалах требований и возможностей k-го критерия, соответственно.

В дальнейшем тексте, там, где это не приведет к недоразумению, для обеих формулировок понятия критериального соответствия будет использоваться обозначение КС.

Введем понятие ценности критериального соответствия для ЛПР, как функции КС, обозначим ее f(КС) и сделаем следующие предположения относительно свойств этой функции:

– при заданном уровне требований значение функции f(КС) возрастает с уменьшением значения компонента вектора соответствия R_{ijk}, становится и остается максимальным при $R_{ijk} = 0$;

– при заданной величине разности $(T_{kp} - V_{kq})$ или заданном значении R_{ijk}, значения функции f(КС), при изменении требований, могут изменяться сложным образом, в соответствии с предпочтениями ЛПР.

Введенные понятия основаны на предположении о том, что с точки зрения ЛПР важность критериев может быть различна, а ценности критериальных соответствий могут немонотонно зависеть от требований.

Цель основной процедуры выявления предпочтений ЛПР заключается в определении и упорядочении ценностей критериальных соответствий (КС) и выявлении на их основе ценности (качества) назначений с точки зрения ЛПР.

В соответствии с подходом, принятым при вербальном анализе решений [15], в качестве основной процедуры выявления предпочтений ЛПР выбрана процедура попарного сравнения отдельных критериальных соответствий. Такой выбор опирается на следующие соображения.

Известно, что операция попарного сравнения изменений качества на шкалах двух критериев достаточно проста для ЛПР. Человек совершает эту психологически корректную операцию с малым количеством противоречий [15].

Для операции попарного сравнения КС можно использовать уже известный способ проверки ЛПР на непротиворечивость – замкнутую процедуру [16]. В такой процедуре все объекты (в данном случае КС) сравниваются между собой. В результате сравнений накапливается избыточная информация, используемая для проверки надежности ранжирования КС по их ценности для ЛПР.

Процедуры подобного рода тщательно отработаны, и полные алгоритмы взаимодействия ЛПР с системой приведены в [15]. Там же обсуждаются проблемы, связанные с зависимостью упорядочиваемых компонент между собой и указываются пути решения этих проблем.

Отличие при сравнениях КСо и КСа заключается в следующем.

В предлагаемой процедуре перед ЛПР ставится задача попарного сравнения ценности отдельных КСа, при предположении, что прочие компоненты вектора соответствия имеют нулевые значения.

Вопросы, задаваемые системой ЛПР имеют следующий вид:

"Что Вы предпочитаете:

Альтернатива 1. Неудовлетворение требований объекта (субъекта) по критерию Ki – вместо оценки Kia предлагается худшая оценка Kib, или

Альтернатива 2. Неудовлетворение требований объекта (субъекта) по критерию K_j – вместо оценки K_{jc} предлагается худшая оценка K_{jd}.

Выберите один из ответов:

Альтернатива 1 более предпочтительна;

Альтернатива 2 более предпочтительна;

Альтернатива 1 и Альтернатива 2 равноценны."

При сравнении КСо делается предположение, что прочие компоненты вектора соответствия принадлежат опорному элементу.

В результате полученных от ЛПР предпочтений, для любых двух КС устанавливается одно из отношений – эквивалентности или превосходства по ценности одного из КС.

Так как все КС сравниваются попарно, то общее количество вопросов к ЛПР при m критериальных соответствиях равно $m(m-1)/2$. При этом КС сравниваются как непосредственно, так и косвенно (через результаты сравнения других КС), что позволяет обнаруживать противоречия в ответах ЛПР. Выявленные противоречия предъявляются ЛПР для анализа и их устранения [16].

Совокупность непротиворечивых результатов сравнений позволяет построить упорядочение КС по ценности для ЛПР. Ранжировка ценностей КС является результатом основной процедуры выявления предпочтений ЛПР.

В дальнейшем под f(КС) будем понимать ранг ценности критериального соответствия (критериальному соответствию, обладающему максимальной ценностью, соответствует высший ранг). Заметим, что принятое определение допускает существование группы рангов одной величины.

Согласно результатам статистического моделирования векторы соответствия отличаются лишь по небольшому количеству критериальных соответствий. Поэтому сравнение отдельных КС между собой и выяснение их ценности для ЛПР, создает надежную основу для сравнения назначений.

Введем понятие ценности назначения $\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\}$ для ЛПР, как функции совокупности КС, формирующих назначение, обозначим ее $F(\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\})$ и сделаем следующие предположения относительно свойств этой функции:

– максимум функции $F(\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\})$ достигается для идеального назначения;

– минимум функции $F(\{\mathrm{C}_i, \mathrm{O}_j\})$ достигается в том случае, когда все КС, формирующие назначение, имеют минимально возможные ценности КС (низшие ранги f(КС)) по соответствующим критериям;

– ценность назначения увеличивается при возрастании ценностей КС, формирующих это назначение.

Возникает задача упорядочения назначений по ценности (качеству).

В качестве исходной информации для проведения процедуры упорядочения назначений по качеству используется таблица, элементами которой являются векторы соответствия. Однако теперь компонентами векторов соответствия являются значения ценности КС по каждому критерию, упорядоченные в соответствии с предпочтениями ЛПР.

Фактически применение основной процедуры приводит к формированию единой порядковой шкалы [15] в пространствах ценностей критериальных соответствий.

5.3.2. Выявление предпочтений лица, принимающего решение: вспомогательная процедура. Приведенная выше основная процедура является достаточной при сравнении КСо. Однако, при сравнении КСа возникает дополнительная проблема.

Получение корректных результатов в процессе попарного сравнения альтернатив и выявления предпочтений ЛПР связано с известным предположением о независимости предпочтений ЛПР от остальных оценок сравниваемых альтернатив [17].

В большинстве реальных приложений это предположение выполняется в результате разумного выбора экспертами набора независимых критериев. Однако избежать завуалированных связей между критериями удается не всегда. Указанием на возможное присутствие таких связей может служить повышенная частота ошибок ЛПР при выборе предпочтений, приводящая к нетранзитивности результатов.

Для проверки независимости предлагается вспомогательная дополнительная процедура.

Сформулируем условие независимости при сравнении двух КСа по их ценности для ЛПР.

Критериальные соответствия независимы, если результат сравнения ценностей векторов с двумя ненулевыми значениями компонент ($f(\text{КСа}_1)$ и $f(\text{КСа}_2)$) не зависит от значений других компонент, т.е. если не найдется какого-либо третьего КСа с $f(\text{КСа}_3) > 0$, для которого

$F(0, \ldots, 0, f(\text{КСа}_1), \ldots, 0) \Longrightarrow F(0, \ldots, 0, f(\text{КСа}_2), \ldots, 0)$, но при этом

$F(0, \ldots, f(\text{КСа}_3), \ldots, 0, f(\text{КСа}_2), \ldots, 0) \gg F(0, \ldots, f(\text{КСа}_3), \ldots, 0, f(\text{КСа}_1), \ldots, 0)$, здесь знак “$\Longrightarrow$” означает “не менее предпочтительно чем”, а знак “$\gg$” означает “более предпочтительно чем”.

Заметим, что данное условие, в отличие от общепринятого условия независимости по предпочтению, сформулировано относительно троек КСа. Обоснованием этого подхода служат исследования, показывающие, что зависимость критериев обычно проявляется как зависимость результатов сравнения оценок двух критериев от оценок по третьему критерию. Именно такая форма зависимости отмечалась в различных работах [15, 18–20]. Появление более сложной "групповой" зависимости неопределенно по своей природе и трудно обнаружимо. Этот факт позволяет утверждать, что при отсутствии троек зависимых КСа условие независимости при сравнении альтернатив не нарушается при любом количестве одинаковых компонент вектора соответствия.

Иначе говоря, при независимости КСа результат сравнения ценностей векторов соответствия не зависит от значений одинаковых ненулевых компонентов этих векторов.

Для проверки выполнения условия независимости необходимо получить дополнительную информацию от ЛПР. При выполнении дополнительной процедуры вопросы, задаваемые ЛПР (см. основную процедуру), повторяются при следующем дополнительном условии:

"По третьему критерию требования объекта (субъекта) не удовлетворены: вместо оценки K_{nr} предложена худшая оценка K_{nt}".

Дополнительные вопросы выбираются так, чтобы перебрать все возможные тройки критериев. Следовательно, количество дополнительных вопросов равно числу сочетаний из N по три.

Следствием выполнения условия независимости является следующее правило:

Если $F(0, f(\text{КСа}_1), 0, 0, 0, \ldots, 0) \Longrightarrow F(0, 0, f(\text{КСа}_2), 0, 0, \ldots, 0)$ и

$F(0, 0, 0, f(\text{КСа}_3), 0, \ldots, 0) \Longrightarrow F(0, 0, 0, 0, f(\text{КСа}_4), \ldots, 0)$, то

$F(0, f(\text{КСа}_1), 0, f(\text{КСа}_3), 0, \ldots, 0) \Longrightarrow F(0, 0, f(\text{КСа}_2), 0, f(\text{КСа}_4), \ldots, 0)$.

Доказательство очевидно.

Это правило используется в процедурах упорядочения и позволяет сократить количество обращений к ЛПР при упорядочении альтернатив.

В случае выявления зависимости наиболее конструктивным выходом является переформулирование критериев. Если такая работа требует слишком больших усилий, паллиативом может служить эмпирическое правило, согласно которому при появлении троек зависимых оценок для сравниваемых альтернатив принимается соотношение, которое выявилось в дополнительной процедуре при проверке условия независимости.

Для иллюстрации процедур выявления предпочтений ЛПР обратимся к приведенному выше простому примеру.

Основная процедура состоит в сравнении ценностей трех критериальных соответствий КСа_i, которые формируют следующие векторы соответствия:

по критерию "Профессиональная подготовленность" – вектор 100 $\{C_1, O_1\}$,

по критерию "Умение руководить коллективом" – вектор 010 $\{C_2, O_2\}$,

по критерию "Практический опыт" – вектор 001 $\{C_3, O_3\}$.

Типовой вопрос, на который отвечает ЛПР, выглядит так:

"Что Вы предпочитаете:

Альтернатива 1. Неудовлетворение требований объекта лишь по критерию "Профессиональная подготовленность": вместо высокой предлагается удовлетворительная оценка профессиональной подготовленности субъекта, или

Альтернатива 2. Неудовлетворение требований объекта лишь по критерию "Умение руководить коллективом": вместо хорошего предлагается удовлетворительное умение субъекта руководить коллективом.

Выберите один из ответов:

1. Альтернатива 1 более предпочтительна.
2. Альтернатива 2 более предпочтительна.

3. Альтернативы равноценны.”

В основной процедуре анализируются ответы на три подобных вопроса. В дополнительной процедуре, применяемой при абсолютных критериальных соответствиях, для рассматриваемого примера достаточно единственного вопроса, который отличается от приведенного выше дополнительным условием:

“Для обеих альтернатив по критерию “Практический опыт” у субъектов имеется низшая оценка – практический опыт отсутствует”.

Если результаты сравнения ЛПР не зависят от наличия или отсутствия КСа по третьему критерию, то делается вывод о выполнении условий независимости.

Заметим, что в рассматриваемом примере, вторые компоненты критериальных соответствий $\mathrm{KC}_k^{pr} = \{T_{kp}, T_{kp} - V_{kq}\}$ для первых двух критериев могут принимать ненулевые значения лишь в единственном случае, когда требования выражаются оценкой $p = 1$, а возможности – оценкой $q = 2$. Для третьего критерия, шкала которого содержит 3 оценки, таких возможностей уже три, из которых лишь одна реализуется в рассматриваемом примере ($p = 2$, $q = 3$).

Как упоминалось выше, в зависимости от типа задачи может быть построена упорядоченная шкала всех оценок по данному критерию, либо упорядочены КСа, встречающиеся только в данной конкретной задаче. В общем случае для шкалы критерия с N оценками существует $N(N-1)/2$ возможностей, которые необходимо проанализировать.

Обратимся к рассматриваемому примеру.

Пусть ЛПР, анализируя назначения $\{\mathrm{C}_1, \mathrm{O}_1\}$, $\{\mathrm{C}_2, \mathrm{O}_2\}$, $\{\mathrm{C}_3, \mathrm{O}_3\}$ с векторами соответствия 100, 010 и 001, упорядочил ценности КСа следующим образом:

$f(\mathrm{KCa}_1^{1,1}) \Longrightarrow f(\mathrm{KCa}_2^{1,1})$ и $f(\mathrm{KCa}_2^{1,1}) \Longrightarrow f(\mathrm{KCa}_3^{2,1})$, что для первой пары интерпретируется в виде:

вектор соответствия, у которого первая компонента равна 1, при оценке по шкале требований, равной 1, а остальные – нулю, предпочтительнее вектора, имеющего, при равных требованиях, вторую компоненту, равную 1, а остальные нулевые;

а для второй пары:

вектор соответствия, у которого вторая компонента равна 1, при оценке по шкале требований, равной 1, а остальные – нулю, предпочтительнее вектора, имеющего третью компоненту, равную 1 при оценке по шкале требований, равной 2 , а остальные нулевые.

При выполнении условия независимости, учитывая транзитивность (из которой следует $f(\mathrm{KCa}_1^{1,1}) \Longrightarrow f(\mathrm{KCa}_3^{2,1})$), эти результаты могут быть использованы для упорядочения ряда назначений без обращения к ЛПР. Для рассматриваемого примера следствием полученного с помощью ЛПР упорядочения КСа являются отношения:

$F(f(\mathrm{KCa}_1^{1,1}), 0, 0) \Longrightarrow F(0, f(\mathrm{KCa}_2^{1,1}), 0) \Longrightarrow F(f(\mathrm{KCa}_1^{1,1}), f(\mathrm{KCa}_2^{1,1}), 0)$,
$F(0, f(\mathrm{KCa}_2^{1,1}), 0) \Longrightarrow F(0, 0, f(\mathrm{KCa}_3^{2,1})) \Longrightarrow F(0, f(\mathrm{KCa}_2^{1,1}), f(\mathrm{KCa}_3^{2,1}))$,
$F(0, f(\mathrm{KCa}_1^{1,1}), f(\mathrm{KCa}_3^{2,1})) \Longrightarrow F(f(\mathrm{KCa}_1^{1,1}), f(\mathrm{KCa}_2^{1,1}), f(\mathrm{KCa}_3^{2,1}))$.

На основании такого рода отношений, как правило, большинство назначений могут быть упорядочены по качеству без обращений к ЛПР.

Так, для приведенного выше примера можно построить граф нестрогих предпочтений, показанный ниже.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \mathrm{C}_1 & & \mathrm{C}_2 & & \mathrm{C}_3 \\
\mathrm{O}_1 & 100 & \Rightarrow & 110 & \Rightarrow & 111 \\
 & \Uparrow & \nearrow\searrow & \Uparrow & \nearrow\searrow & \Uparrow \\
\mathrm{O}_2 & 000 & \Rightarrow & 010 & \Rightarrow & 011 \\
 & \| & \nearrow & \Uparrow & \nearrow\searrow & \Uparrow \\
\mathrm{O}_3 & 000 & = & 000 & \Rightarrow & 001
\end{array}
$$

Таблица 3

Объекты\Субъекты	C_1	C_2	C_3
O_1	1	3	5
O_2	0	2	4
O_3	0	0	3

В рассматриваемом примере формально остается невыясненным лишь отношение между назначениями $\{C_2, O_1\}$ и $\{C_3, O_2\}$, формирование которого требует обращения к ЛПР.

Однако и это отношение может быть получено автоматически, если проведена дополнительная процедура и выяснено, что условие независимости выполняется.

Тогда, поскольку $F(f(\text{KCa}_1^{1,1}), 0, 0) \Longrightarrow F(0, 0, f(\text{KCa}_3^{2,1}))$ и это отношение не может измениться от наличия одинакового КСа по второму критерию у сравниваемых векторов, то

$F(f(\text{KCa}_1^{1,1}), f(\text{KCa}_2^{1,1}), 0) \Longrightarrow F(0, f(\text{KCa}_2^{1,1}), f(\text{KCa}_3^{2,1}))$, т.е.

$F\{C_2, O_1\} \Longrightarrow F\{C_3, O_2\}$.

Аналогичные графы могут быть построены и в общем случае. Назовем их графами частичного упорядочения векторов соответствия по их ценности для ЛПР. Графы частичного упорядочения векторов соответствия позволяют перейти к ранжированию по ценности этих векторов.

Выделим в графе все недоминируемые векторы и назовем их первым ядром. Среди векторов, оставшихся после удаления первого ядра выделим второе ядро, состоящее из недоминируемых векторов в редуцированном пространстве. Этот процесс повторяется до исчерпания графа [16].

Вектору, входящему в i-е ядро присваивается i-й ранг, если над ним доминирует вектор из $(i-1)$-го ядра, а он сам доминирует над вектором из $(i+1)$ ядра. Если вектор входит в i-е ядро и доминирует над вектором из $(i+p)$-го ядра, то его ранг размыт и находится в пределах от $(i+1)$ до $(i+p-1)$.

Заметим, что предложенный способ ранжирования является одним из возможных. Так, в методе ЭЛЕКТРА 2 [21] дополнительно к верхним паретовым слоям выделяют нижние и определяют ранг объекта как среднее двух рангов.

Для предложенного способа ранжирования, назначения более высокого, с точки зрения ЛПР, качества (с меньшим номером) не могут иметь более низкий ранг (больший номер) чем худшие по качеству назначения. Это обстоятельство существенно используется в процедурах поиска решения МЗН.

Процедура ранжирования для рассматриваемого примера приводит к следующему результату:

Ядро	Список назначений			Ранг
1	$\{C_1, O_2\}$	$\{C_1, O_3\}$	$\{C_2, O_3\}$	1
2	$\{C_1, O_1\}$			2
3	$\{C_2, O_2\}$			3
4	$\{C_2, O_1\}$	$\{C_3, O_3\}$		4
5	$\{C_3, O_2\}$			5
6	$\{C_3, O_1\}$			6

Обозначив высший ранг – нулем, получим для рассматриваемого примера следующую матрицу (табл. 3), отражающую упорядочения назначений по качеству (высшее качество – идеальное назначение, имеет высший ранг, которому присвоено значение 0, при снижении качества уменьшается и ранг назначения и соответственно увеличивается его номер, т.е. число, отображающее качество) в соответствии с предпочтениями ЛПР.

Таблица 4

Объекты\Субъекты	C_1	C_2	C_3
O_1	1	3	4
O_2	0	2	3
O_3	0	0	1

В результате выполнения основной и вспомогательной процедур выявления предпочтений, назначения ранжируются относительно их ценности для ЛПР.

Выше была проиллюстрирована основная процедура выявления предпочтений ЛПР для абсолютных критериальных отклонений. Покажем, каким могло бы быть решение рассматриваемого примера при анализе относительных критериальных отклонений.

Первый этап такого анализа для этого примера прост и не требует участия ЛПР. Действительно, из анализа таблицы сходства (табл. 1) и учета свойств функции ценности следует упорядочение всех объектов по отношению к каждому из субъектов и наоборот. Суммируя полученные при таком ранжировании ранги (высший ранг равен 0), получим следующую матрицу (табл. 4).

В соответствии с критерием оптимальности ЛПР утверждает очевидное решение:

$[\{C_1, O_2\}, \{C_2, O_3\}, \{C_3, O_1\}]$.

В общем случае могут возникнуть дополнительные вопросы к ЛПР, однако, как правило, количество вопросов к ЛПР на данном этапе при предлагаемом подходе меньше, чем при анализе с использованием абсолютного индекса соответствия.

6. Поиск окончательного решения многокритериальной задачи о назначениях

Результатом предыдущего этапа является упорядоченное по качеству множество назначений, представленное в виде матрицы, элементами которой являются оценки качества назначений – оценки единой порядковой шкалы, эквивалентные рангам. Матрица качества назначений служит исходной информацией для процедур поиска окончательного решения МЗН.

Напомним введенное ранее понятие ценности решения МЗН для ЛПР, как функции совокупности назначений, формирующих решение МЗН – $\Phi(MS)$. Далее предлагается несколько различных процедур поиска окончательного решения МЗН, выбор которых зависит от типа рассматриваемой задачи.

Заметим, что предлагаемые ниже рекомендации не являются жесткими, поскольку основаны на принятой выше классификации задач, которая не является единственно возможной. Однако она обеспечивает возможности СППР по выдаче рекомендаций при выборе различных процедур поиска решения в зависимости от типа задач.

Например, как отмечалось ранее, для повторяющихся задач рекомендуется процедура построения единой шкалы ценностей КСа. Однако, если эта задача принадлежит к типу B, для которого характерно большое критериальное пространство и малая размерность множества элементов, и к тому же, если задача повторяется редко, то может оказаться более удобным подход, основанный на анализе критериальных соответствий, встречающихся лишь в данной конкретной задаче – КСо.

СППР лишь рекомендует возможные подходы для тех или иных типов задач, но выбор процедуры поиска решения остается за ЛПР, который может учитывать рекомендации системы, но волен поступить, исходя из своих реальных возможностей и потребностей. Любой из выбранных путей приведет к цели, но некоторые сделают это быстрее и потребуют меньших затрат. Эти соображения и позволяют нам рекомендовать следующие стратегии выбора процедур поиска решений МЗН.

6.1. Поиск решения МЗН типа *A*. При малом числе критериев, объектов и субъектов процедура решения МЗН может выглядеть следующим образом.

1. Выполняется этап анализа данных.

2. Используются основная и, если необходимо, вспомогательная процедуры выявления предпочтений ЛПР.

Этот этап является завершающим для данного типа задач.

6.2. Поиск решения МЗН типа *B*. При большом числе критериев и сравнительно небольшом числе объектов и субъектов рекомендуется следующий порядок поиска решения МЗН.

1. Этап анализа данных.

2. Формирование области допустимых решений.

3. Формирование структуры предпочтений ЛПР – основная и вспомогательные процедуры. Рекомендуется проводить упорядочение КСа по ценности лишь для реально существующего пространства КС, что позволит существенно уменьшить нагрузку на ЛПР. Эта рекомендация особенно касается уникальных задач.

4. Ранжирование векторов соответствия по ценности.

5. Формирование ранговой матрицы объекты – субъекты, элементами которой являются числа, отражающие ранги векторов соответствия.

6. Решение однокритериальной задачи о назначениях на ранговой матрице с оптимизацией по критерию максимального числа наилучших назначений (минимизируется сумма чисел, отражающих ранги назначений, вошедших в окончательное решение, затем реализуется рассмотренный выше алгоритм поиска эффективного решения в ОДР).

6.3. Поиск решения МЗН типа *C*. При большом числе объектов и субъектов, но малом числе критериев рекомендуются два подхода к поиску решения МЗН.

Первый подход аналогичен стратегии поиска решения, применяемой для задач типа B. Отличие заключается в том, что на этапе формирования структуры предпочтений ЛПР, рекомендуется проводить упорядочение КСа по ценности для всего критериального пространства, что в данном случае позволит существенно уменьшить нагрузку на ЛПР. Эта рекомендация особенно касается повторяющихся задач, поскольку один раз сформированная единая шкала ценностей КСа может затем использоваться многократно.

Второй подход рекомендуется для уникальных задач типа C. Этот подход основан на идеях, предложенных в [9, 11] и определяет следующий порядок поиска решения МЗН.

1. Этап формального анализа.

2. Формирование структуры предпочтений ЛПР.

На этом этапе таблица соответствия анализируется ЛПР дважды – вначале по строкам, затем по столбцам. Построчный анализ позволяет ранжировать предпочтения ЛПР, отражающие степень удовлетворенности субъекта характеристиками объектов, т.е. получить собственную ранжировку для каждой строки таблицы соответствия. Результаты проведенного анализа отражаются в первой из двух ранговых матриц. Аналогично, при анализе таблицы соответствия по столбцам формируется вторая ранговая матрица.

Выполнение процедур этого этапа требует от ЛПР существенно меньше информации, чем при формировании порядка на всем пространстве ОДР.

3. Производится автоматическое формирование единой ранговой матрицы объекты – субъекты, элементами которой являются числа, отражающие ранги векторов соответствия. В каждой клетке единой матрицы находится сумма чисел, расположенных в соответствующих элементах двух ранговых матриц. Дальнейшие шаги

алгоритма построены так, что важными являются лишь элементы единой ранговой матрицы, составляющие ядро первого порядка, т.е. нулевые элементы. Поэтому выбрана наиболее простая операция, позволяющая выявить нулевые элементы – суммирование.

4. Предпринимается поиск решения однокритериальной задачи о назначениях на единой ранговой матрице с оптимизацией по критерию максимального числа нулевых элементов (наилучших назначений).

5. Варианты назначений одинакового ранга предъявляются ЛПР для дополнительного анализа. СППР предупреждает о последствиях принимаемых решений.

6. Производится понижение размерности задачи и редуцирование матриц за счет удаления сделанных назначений, переформулирование рангов в каждой из исходных матриц, т.е. присвоение в каждой отдельной строке нулевого значения высшим из оставшихся в строке рангов.

7. Повторение этапов 4–6 до получения полного решения МЗН.

На этом работа процедуры поиска решений МЗН заканчивается. Заметим, что лишь на втором и шестом этапах требовалось вмешательство ЛПР, последующие циклы могут выполняться без его участия. В [9] доказана теорема о существовании наилучшего (нулевого) элемента ранговой матрицы на каждом цикле процесса, т.е. сходимости рассмотренного процесса при условии, что упорядочения векторов соответствия транзитивны.

Построение процесса обеспечивает эффективное решение, соответствующее максимально возможной ценности решения для ЛПР (критерию оптимальности).

6.4. Поиск решения МЗН типа *D*. При многих критериях и большом числе элементов двух множеств задача становится малообозримой для ЛПР. Можно рекомендовать следующую процедуру ее решения.

1. Этап анализа данных.

2. Формирование области допустимых решений.

Этот этап играет решающую роль для задач очень большой размерности. Рекомендуется, чтобы ЛПР уделил максимум внимания и постарался сузить ОДР для облегчения своей последующей работы.

Желательно, чтобы в процессе формирования ОДР был найден удовлетворительный для ЛПР тип решения МЗН. Затем, за счет введения дополнительных ограничений, желательно сформировать ОДР, которая приводила бы к почти однозначному решению МЗН. Средства быстрого поиска решений СППР при формальном индексе соответствия позволяют найти решение, затрачивая минимум усилий. Необходимо помнить, однако, что эти средства работают в предположении практической равноценности критериев и шкал.

В случае большого процента идеальных назначений в задачах большой размерности, удобным приемом может служить процедура редуцирования матрицы исходных данных. Эта процедура основана на удалении из матрицы взаимной неудовлетворенности строк и столбцов, включающих идеальные назначения, вошедшие в решение ЗН.

3. Дальнейший ход поиска зависит от размерности редуцированной матрицы и может идти путями, предложенными для задач других типов. Предлагаемая процедура не гарантирует достижения оптимального по ценности для ЛПР решения. Однако, поскольку решение находится в ОДР, сформированной ЛПР на основе своих предпочтений, а процедуры поиска приводят к эффективному решению, в котором присутствует максимально возможное для выбранной ОДР количество идеальных назначений, то окончательное решение МЗН находится в пространстве приемлемых для ЛПР решений.

7. Обсуждение

Предлагаемый подход к решению различных типов МЗН отличается тем, что особое внимание уделяется возможностям и ограничениям, присущим человеку при обработке информации.

Действительно, согласно традиционному подходу теории полезности, можно было бы поставить задачу построения функции полезности (ценности) ЛПР, позволяющей найти полное упорядочение векторов соответствия.

Отметим, что такой подход наиболее распространен в теории принятия индивидуальных решений [22]. Однако, в последние годы стали очевидными существенные трудности, связанные с применением этого подхода:

1. Результаты современных психологических анализов показывают, что многие операции переработки информации сложны для человека. Существует сравнительно небольшой перечень операций переработки информации, который человек выполняет достаточно надежно, с небольшим количеством ошибок, противоречий [15, 23]. Большинство таких операций имеет характер качественных сравнений [23]. Именно такого рода операции, корректные с психологической точки зрения, используются в предлагаемых алгоритмах при выявлении предпочтений ЛПР.

2. При построении функции ценности в математической теории принятия решений [17] основное внимание уделяется проверке условий независимости. Обычно процедуры таких проверок трудоемки и связаны с достаточно сложными для ЛПР вопросами.

В то же время известно, что зависимость критериев обычно проявляется как зависимость результатов сравнения оценок двух критериев от оценок по третьему критерию. Появление более сложной, "групповой" зависимости "неопределенно по своей природе и трудно обнаружимо" [18–20]. Этот факт учтен при разработке изложенных выше способов выявления предпочтений ЛПР.

3. При построении функций полезности и ценности в теории принятия решений делается предположение о транзитивности предпочтений ЛПР. Между тем это предположение плохо оправданно с поведенческой точки зрения [24]. Поэтому неотъемлемой частью предложенных выше способов выявления предпочтений ЛПР является проверка получаемой от ЛПР информации на транзитивность.

Предложенные способы выявления предпочтений ЛПР основаны на подходе вербального анализа решений [15], методы которого имеют как математическое, так и психологическое обоснование.

8. Заключение

Подчеркнем еще раз особенность рассматриваемой задачи, которая выделяет ее из ряда других задач принятия решений: необычная роль ЛПР.

В отличие от типичных задач принятия индивидуальных решений в данном случае ЛПР не занимает позиции диктатора. Он выступает как посредник, как консультант в тех случаях, когда без его вмешательства решение задачи заходит в тупик.

В предлагаемых алгоритмах используются предпочтения ЛПР. Однако ЛПР вмешивается в ход решения по возможности осторожно, разрешая локальные конфликты между возможными назначениями.

Решение МЗН в реальной ситуации невозможно без помощи СППР.

СППР МЗН имеет все характерные черты компьютерной системы, выступающей в роли помощника ЛПР. В ее структуру включены базы данных (описание проблемы, сведения об объектах и субъектах, критерии и их шкалы, оценки элементов двух множеств) и базы моделей (модели близости, максимальных паросочетаний, модели выявления предпочтений ЛПР).

В системе учитывается влияние объективных и субъективных факторов, влияющих на процедуры поиска решения. Развитый интерфейс позволяет руководителю работать с системой с минимальной предварительной подготовкой. Важно, что система дает ЛПР возможность поэтапно анализировать поставленную проблему и вырабатывать свои предпочтения в процессе интерактивной работы с системой. Ответы на вопросы ЛПР типа: "Что произойдет, если предъявить определенные требования к решению задачи?" позволяют изучить область допустимых решений при различных вариантах определения ограничений.

Процедуры ускоренного поиска решений позволяют выбрать тип решения. Поэтапные сравнения характеристик элементов (объектов и субъектов) позволяют шаг за шагом делать наиболее адекватные, с точки зрения ЛПР, назначения.

На наш взгляд, именно такие системы – советчики и помощники, позволяют руководителю более качественно формировать, обосновывать и объяснять другим свою политику, повышая шансы принятия разумных и дальновидных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blanco T.* Multiple Criteria Decision Making in Military Personnel Assignment // Proc. 7th International Conf. on MCDM. Kyoto, Japan, 1986.
2. *Blanco T., Hillery C.* A Sea Story: Implementing The Navy's Personnel Assignment System // Operations Research. 1994. V. 42. No. 5. P. 814–822.
3. *Черняк Л., Сердечкина Н., Кожухаров А., Патрикеева Т.* Модель процесса подготовки рукописей в издательстве // Сб. Алгоритмы и модели управления в технических и организационных системах. М.: Институт проблем управления, 1976. С. 52–58.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982.
5. *Gale D., Shaply L.* College Admissions and the Stability of Marriage // Amer. Math. Month. 1962. No. 69. P. 9–15.
6. *Gardenfors P.* Assignment Problem Based on Ordinal Preferences // Mgmt. Sci. 1973. Nov. V. 20. P. 331–340.
7. *Gardenfors P.* Match-Making: Assignments Based on Bilateral Preferences // Behav. Sci. 1975. 20. P. 166–173.
8. *Larichev O., Sternin M.* Knowledge-based approach for solving the multicriteria assignment problem // Linster M. (ed). Sisyphus 92. Models of problem solving. Arbeitspapiere der GMD 630. March 1992.
9. *Кожухаров А.Н., Ларичев О.И.* Многокритериальная задача о назначениях // АиТ. 1977. № 7. С. 71–87.
10. *Larichev O.I., Kozhukharov A.N.* Multiple criteria assignment problem: combining the collective criterion with individual preferences // Mathematique of Scinces humain. (Paris). 17-e annee, 1979. No. 68. P. 63–77.
11. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987.
12. *Стернин М.Ю.* Система поддержки решения задачи о назначениях // Системы и методы поддержки принятия решений: Сб. тр. М.: ВНИИСИ. 1986. С. 74–86.
13. *Стернин М.Ю.* Интерактивный поиск решений многокритериальной задачи о назначениях // Системы и методы поддержки принятия решений: Сб. тр. М.: ВНИИСИ. 1988. С. 21–31.
14. *Пападимитриу Х., Стайниц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
15. *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* Качественные методы принятия решений. М.: Наука-Физматлит, 1996.
16. *Ларичев О.И., Зуев Ю.А., Гнеденко Л.С.* Метод ЗАПРОС (Замкнутые Процедуры у Опорных Ситуаций) анализа вариантов сложных решений // М.: Труды ВНИИСИ, 1978. № 5. С. 83–96.
17. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.

18. *Fischer G.* Range Sensitivity of Attribute Weights in Multiattribute Utility Assessment. Duke University, 1991.
19. *Winterfeldt von D.* An overview, integration and evaluation of utility theory for desigion analysis // Soc. Science Research Institute, Report 75-09. University of South California, 1975.
20. *Winterfeldt von D., Fischer G.W.* Multiattribute utility theory: Models and assessment procedures. Utility, probability and human decision making. Eds. D. Wendt, C. Vlek. Dordrecht: Reidel, 1975.
21. *Roi B.* Methodologie Multicritere d'Aide a la Decision. Paris: Economica, 1985.
22. *Фишборн П.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
23. *Larichev O.* Cognitive validity in Design of Decision-Aiding Techniques // Journal of Multicriteria Decision Analysis. 1992. V. 1. No. 3. P. 127–138.
24. *Tversky A.* Intransitivity of preferences // Psychological Review. 1969. V. 76. No. 1.

Поступила в редакцию 30.09.97