

УДК 62-50:621.771.2

О СУБОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ МНОГОСВЯЗНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СВЯЗЬЮ ПО УПРАВЛЯЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

О. И. ЛАРИЧЕВ, И. И. ПЕРЕЛЬМАН

(Москва)

Рассматривается многосвязная система, у которой связь между отдельными контурами обуславливается общим ограничением, наложенным на функции управления в контурах.

Предлагается способ субоптимального управления системой для случая, когда нет строгого критерия качества, а имеются лишь простые предположения о желаемом ходе процесса.

Исследование проводится применительно к системе стабилизации натяжения полосы в непрерывном листопрокатном стане.

1. Системы со связью по управлению

Рассмотрим многосвязную систему автоматического регулирования, состоящую из N контуров регулирования и описываемую системой дифференциальных уравнений

$$F_i [x_i(t)] = U_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $F_i [x_i(t)]$ — дифференциальный оператор от выходной координаты i -го контура $x_i(t)$, $U_i(t)$ — сигнал управления в i -м контуре.

Сигналы $U_i(t)$ образуют N -мерный вектор управления $\bar{U}(t)$. Связь контуров по управлению заключается в наличии определенных зависимостей между значениями компонентов вектора управления, приводящих к тому, что реализация данного значения сигнала управления в данном контуре обуславливает сокращение свободы выбора управления для остальных контуров.

Будем рассматривать связь управлений, заключающуюся в том, что вектор \bar{U} ограничен некоторой заданной областью N -мерного пространства:

$$\bar{U} \in U^*, \quad (2)$$

где U^* — замкнутая область.

Назовем верхнюю и нижнюю границы проекции области U^* на координатную ось U_i абсолютным максимумом и абсолютным минимумом управления для i -го контура (U_i^+ и U_i^-). Минимальные и максимальные значения управления в i -м контуре, достигаемые при предварительном выборе управления в j -м контуре, назовем условными максимумом и минимумом 1-го порядка и обозначим $U_i^+(U_j^-)$, $U_i^+(U_j^+)$, $U_i^-(U_j^+)$, $U_i^-(U_j^-)$.

Вообще условными максимумом и минимумом n -го порядка ($n = 1, 2, \dots, N - 1$) сигнала управления i -го контура назовем максимально и минимально возможные значения U_i при условиях, что в n других контуров системы уже произведен выбор управлений.

Очевидно, что величины условных максимумов и минимумов n -го порядка зависят от номеров контуров, в которых осуществляются экстремумы более низких порядков, и от характера этих экстремумов (максимум или минимум), т. е. управление U_i ($i = 1, \dots, N$) может иметь $A_{N-1}^{n-1} \cdot 2^n$ различных значений условных максимумов и минимумов n -го порядка.

Примером связи по управлению (2) может служить

$$(U_1)^2 + (U_2)^2 + \dots + (U_N)^2 \leq B, \quad (3)$$

где B — заданная положительная постоянная.

В данном случае вектор управления системы по любому направлению не превосходит по модулю величины B . При этом $U_i^+ = |U_i^-| = B$ ($i = 1, \dots, N$). В случае, когда в дополнение к (3) $U_i^2 = \max\{U_1^2, \dots, U_N^2\} < B$, возможно осуществление условных экстремумов в остальных контурах.

Другим примером (2) является связь по управлению следующего вида:

$$U_i = \sum_{j=1}^N k_{ij} g_j \quad (i = 1, \dots, N), \quad (4)$$

где k_{ij} — заданные коэффициенты, g_j — сигналы, принимающие любые значения внутри диапазона

$$g_{j\text{макс}} \geq g_j \geq g_{j\text{мин}}. \quad (5)$$

На основании (4) и (5) всегда можно выбрать сигналы g_j ($j = 1, 2, \dots, N$), обеспечивающие абсолютный экстремум любого заданного управления U_i . При этом, если некоторые из коэффициентов k_{ij} равны нулю, возможно также осуществление условных экстремумов управления в других контурах. Пусть, в частности:

$$U_i = k_{ii} g_i + k_{i, i+1} g_{i+1}, \quad U_N = k_{NN} g_N \quad (i = 1, \dots, N-1). \quad (6)$$

Тогда в системе возможно осуществление всех условных экстремумов до $N - 2$ -го порядка включительно. Уравнения типа (4) характерны для задач управления производственными агрегатами, состоящими из связанных в одну технологическую линию приводов, как, например, непрерывных прокатных и волочильных станов, бумагоделательных машин и т. п.

Пусть m_i — высшая степень оператора F_i (1). Тогда, приняв, что в (1) $x_i, \dot{x}_i, \dots, x_i^{(m_i)}$ ($i = 1, \dots, N$) означают отклонения координат системы от заданного состояния покоя, соответствующего точке начала координат в

P -мерном пространстве ($P = \sum_{i=1}^N m_i$), будем считать, что цель управления

заключается в переводе изображающей точки из заданного начального положения в начало координат. Очевидно, что траектория процесса регулирования зависит от выбранного закона распределений управлений в контурах системы. В общем случае существует бесчисленное множество траекторий, которые могут быть реализованы при заданных начальных условиях, типах связи по управлению и ограничениях управлений.

В случае, если задан критерий качества регулирования в виде некоторого функционала

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N, \dots), \quad (7)$$

можно каким-либо из известных методов [1—3] попытаться найти из множества траекторий оптимальную, обеспечивающую экстремум выбранного критерия. Однако во многих практических задачах трудно сформулировать обоснованный критерий качества в виде функционала (7), при-

чем в системах с многими регулируемыми величинами эти трудности значительно повышаются.

При отсутствии строго обоснованного критерия качества выбор управления может производиться на основании некоторых простых предположений о желаемом ходе процесса, позволяющих приблизить реализуемую траекторию к области предполагаемого нахождения неизвестной оптимальной траектории. Системы с таким управлением будем называть субоптимальными системами. В ряде случаев такие субоптимальные системы являются более предпочтительными, чем системы, обеспечивающие экстремум недостаточно обоснованного функционала (7). В последнем случае, после реализации часто очень сложного управляющего устройства, получаем систему, близость которой к оптимальной целиком определяется близостью выбранного критерия качества к неизвестному истинному критерию, т. е. фактором, не поддающимся оценке.

Субоптимальные системы со связью по управлению могут быть построены следующим образом. На основании предположений о желаемом ходе процесса формулируются функции сравнения, каждая из которых характеризует меру существующей в данный момент времени t потребности i -го контура в экстремальном значении управляющего сигнала. Таким образом, абсолютный экстремум управления и условные экстремумы 1, 2, ..., $N-1$ -го порядка реализуются в момент времени t в контурах с номерами соответственно a_1, a_2, \dots, a_{N-1} , если

$$W_{a_1} > W_{a_2} > \dots > W_{a_{N-1}},$$

причем необходимость данного контура в экстремальном управлении (функция W_i) определяется не на основании протекания всего будущего процесса регулирования, а с точки зрения протекания процесса на некотором ближайшем отрезке времени, ограниченном моментом попадания изображающей точки на определенные гиперповерхности в P -мерном пространстве. Это обстоятельство и позволяет выбрать функции W_i достаточно простого вида. Все возможные значения экстремальных управлений, получающиеся при различных соотношениях функций сравнения, могут быть сведены в матрицу управлений, состоящую из N столбцов (соответствующих N контурам) и $A_N^{2^N}$ строк:

$$\begin{array}{cccccccc} U_1^+ U_2^+ (U_1^+) \dots U_N^+ (U_1^+ \dots), & & & & & & & \\ \cdot & \cdot \\ U_1^- (U_N^-) U_2^- (U_N^- \dots) \dots U_N^-. & & & & & & & \end{array} \quad (8)$$

Методы построения субоптимальных систем со связью по управлению поясним на примере.

2. Субоптимальная система управления непрерывным листопрокатным горячим станом

В непрерывном прокатном стане (рис. 1) между каждой парой клетей стана должна поддерживаться заданная величина продольного натяжения прокатываемого металла. Рассогласования в натяжении между клетями возникают под влиянием внешних возмущений, как, например, изменения температуры, перемещения нажимных винтов и т. д. Они ухудшают качество проката и создают угрозу аварий на прокатном стане. Необходимая регулировка натяжения может быть осуществлена путем управления скоростями главных приводов, как это следует из известного соотношения [4]

$$x_i(t) = k_{i1} x_{i-1} + k_{i2} x_{i+1} + \int_0^t (k_{i3} \Delta n_{i+1} - k_{i4} \Delta n_i) dt, \quad (9)$$

где $x_i(t)$ — приращение натяжения полосы между клетями с номерами $i-1$ и i ($i = 1, 2, \dots, N$) ($x_{i-1} = 0$ при $i = 1$ и $x_{i+1} = 0$ при $i = N$), Δn_i — приращение скорости привода i -й клетки, $k_{i1} - k_{i4}$ — постоянные коэффициенты.

Как видно из (9), при изменении скорости вращения валков клетки натяжение полосы перед клетью и после клетки меняется, причем при увеличении скорости натяжение перед клетью увеличивается, а за клетью — уменьшается.

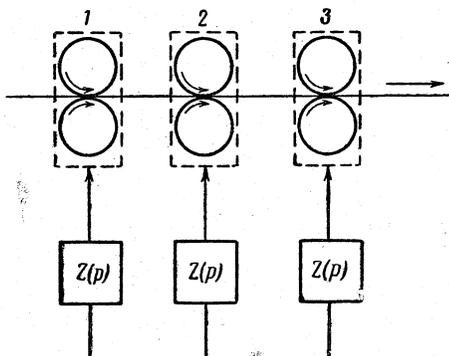


Рис. 1

Обозначим через $g_i(t)$ приращение сигнала управления i -м приводом, связанное с Δn_i линейным дифференциальным уравнением

$$\Delta n_i(p) = z_i(p) g_i(p), \quad (10)$$

где $p = d/dt$, $z_i(p)$ — дробно-рациональная функция от p .

Обычно в прокатном стане $g(t)$ представляет собой приращение тока двигателя, имеющее ограничение по модулю типа (5). Поскольку характеристики двигателей главных приводов обычно одинаковы, можно считать, что передаточные функции $z_i(p)$ отличаются при разных i только постоянными коэффициентами, учитывающими разные передаточные числа редукторов клеток, т. е.

$$\Delta n_i(p) = k_{i5} z(p) g_i(p), \quad (11)$$

где k_{i5} — коэффициент пропорциональности. На основании (9) и (11)

$$x_i(p) = k_{i1} x_{i-1}(p) + k_{i2} x_{i+1}(p) + \frac{z(p)}{p} [k_{i6} g_{i+1}(p) - k_{i7} g_i(p)], \quad (12)$$

(k_{i6} и k_{i7} — коэффициенты пропорциональности). Для натяжения x_{N-1} на основании (12) имеем

$$x_{N-1}(p) = k_{N-1,1} x_{N-2} + \frac{z(p)}{p} [k_{N-1,6} g_N(p) - k_{N-1,7} g_{N-1}(p)]. \quad (13)$$

Для x_{N-2} , учитывая (13), получим

$$\begin{aligned} x_{N-2}(p) [1 - k_{N-2,2} k_{N-1,1}] = & k_{N-2,1} x_{N-3} + \\ & + \frac{z(p)}{p} [k_{N-2,6} g_{N-1}(p) - k_{N-2,7} g_{N-2}(p) + \\ & + k_{N-2,7} k_{N-1,6} g_N(p) - k_{N-2,2} k_{N-1,7} g_{N-1}(p)]. \end{aligned}$$

Продолжая аналогично, найдем

$$x_i(p) = K_i x_{i-1} + \frac{z(p)}{p} \psi_i [g_i(p), g_{i+1}(p), \dots, g_N(p)], \quad (14)$$

где K_i — коэффициент пропорциональности, $\psi_i [g_i(p), \dots, g_N(p)]$ — линейная комбинация управлений.

При $i = 1$ из (14) следует

$$x_1(p) = \frac{z(p)}{p} \psi_1 [g_1(p), \dots, g_N(p)]. \quad (15)$$

Подставим (15) в выражение для $x_2(p)$:

$$x_2(p) = \frac{z(p)}{p} \psi_2 [g_1(p), \dots, g_N(p)].$$

Действуя аналогично, получим, что выражение (9) для рассматриваемой системы может быть представлено в виде

$$x_i(p) = \frac{z(p)}{p} U_i(p), \quad (16)$$

где $U_i(p)$ — сигнал управления, определяющийся через g_i , согласно уравнению (4).

Полагая, что коэффициенты k_{i1} и k_{i2} в (12) достаточно малы, что справедливо для процессов прокатки со слабым натяжением (в частности, для процессов прокатки на горячих непрерывных станах), получим уравнение (16), в котором $U_i(p)$ будет совпадать с (6). В настоящее время регулирование натяжения происходит без учета связи по управлению, причем скорость каждой i -й клетки регулируется в функции рассогласования натяжения полосы до или после этой клетки (x_{i-1} или x_i соответственно). Очевидно, что такой способ регулирования не обеспечивает полного использования имеющихся ресурсов управления, необходимого для ликвидации больших рассогласований натяжения. Рассмотрим теперь другой способ регулирования натяжения, позволяющий более полно использовать ресурсы управления. Будем исходить из следующих соображений. Если бы имелась функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, \dots)$, характеризующая вред, приносимый данными значениями рассогласования натяжения, то критерием качества мог бы служить, например, интеграл вида:

$$\int_0^t \Phi \cdot dt.$$

Однако современное состояние теории проката не дает возможность определить эту функцию вреда. Существуют только очевидные технологические положения, на основе которых можно реализовать субоптимальное управление системы.

1. Ухудшение качества готового листа сложным образом зависит от всех x_i ($i = 1, \dots, N$). Степень «вредности» каждого x_i быстро возрастает с ростом его абсолютного значения.

2. В данный момент времени t опасность брака и аварии целиком определяется наибольшим из $x_i(t)$.

3. Желательно, чтобы процесс регулирования натяжения заканчивался возможно быстрее.

Пренебрегая электромеханической постоянной двигателя главного привода и учитывая безынерционность ртутных выпрямителей, питающих якорь двигателя, можно рассматривать привод с ограничением тока двигателя как звено 2-го порядка, состоящего из двух интегрирующих звеньев и имеющее ограниченное управление. Исходя из этого, можно положить в (15) $z(p) = 1/p$. Тогда процесс регулирования в каждом из контуров может быть представлен на фазовой плоскости x_i , $\dot{x}_i = V_i$, где x_i — отклонение координаты i -го контура регулирования от желаемого значения. Совместив эти плоскости, будем характеризовать состояние всей системы положением N изображающих точек на совмещенной фазовой плоскости. Цель управления состоит в переводе изображающих точек в начало координат фазовой плоскости. Управления в контурах будем поддерживать на максимально возможных значениях, которые, как указывалось, определяются порядком экстремумов в контурах.

Введем линию переключения знака управления:

$$V_i^2 = \begin{cases} -2U_k^- x_i & \text{при } V_i < 0, \\ 2U_k^+ x_i & \text{при } V_i > 0, \end{cases} \quad (17)$$

где U_k^+ , U_k^- — заданные положительные величины, определяющие допустимый процент перерегулирования в данном контуре при нулевых отклонениях в других контурах. Линия переключения для данного контура и ось x разобьют фазовую плоскость на четыре области. Назовем области, в которых выполняется условие $U_i V_i(t) > 0$, областями разгона, а области, в которых $U_i V_i(t) < 0$ — областями торможения.

Исходя из приведенных далее соображений, введем следующие функции сравнения контуров:

$$W_i(t) = \begin{cases} |x_i(t)| & \text{при } [V_i(t)]^2 < 2\beta_i^- x_i \text{ и } V_i(t) > 0 \text{ или} \\ & [V_i(t)]^2 < 2\beta_i^+ x_i \text{ и } V_i(t) < 0, \\ x_i(t) - \frac{[V_i(t)]^2}{2\beta_i^-} & \text{при } |V_i(t)| > |2\beta_i^- x_i| \text{ и } V_i(t) > 0, \\ x_i(t) - \frac{[V_i(t)]^2}{2\beta_i^+} & \text{при } |V_i(t)| > |2\beta_i^+ x_i| \text{ и } V_i(t) < 0, \end{cases} \quad (18)$$

где β_i^+ и β_i^- — заданные положительные величины.

Кривую на фазовой плоскости, определяемую уравнениями

$$V_i^2 = \begin{cases} 2\beta_i^+ x_i & \text{при } V_i < 0, \\ -2\beta_i^- x_i & \text{при } V_i > 0, \end{cases} \quad (19)$$

назовем кривой сравнения (кривая AOB на рис. 2).

Таким образом, геометрическое место точек $W_i(t) \leq b$, где b — некоторая постоянная, определяется на фазовой плоскости областью, ограниченной верхней ветвью параболы:

$$x_i = b - \frac{V_i^2}{2\beta_i^-},$$

нижней ветвью параболы: $x_i = b - \frac{V_i^2}{2\beta_i^+}$, отрезками прямых $x = -b$ и $x = +b$ и двумя участками

кривой сравнения (19) при $|x| \geq b$ (рис. 2). В основе данного определения функций сравнения (18) лежат разные цели управления при разгоне и торможении. При разгоне сигнал управления способствует быстрой отработке существующего в данный момент отклонения $x_i(t)$ и поэтому мерой потребности контура в экстремальном значении управляющего сигнала может служить модуль величины $x_i(t)$. При торможении управление ведется с целью уменьшить амплитуду будущего перерегулирования системы, достигаемую в конце режима торможения, т. е. при $V_i = 0$. Поэтому в данном случае мерой потребности в экстремальном значении управляющего сигнала может служить модуль величины будущего перерегулирования.

В частном случае, когда линия переключения выбирается из условия оптимального по быстродействию регулирования в данном контуре и кривая сравнения совпадает с линией переключения, функции сравнения определяются следующим образом:

в областях разгона

$$W_i(t) = |x_i(t)|, \quad (20)$$

в областях торможения

$$W_i(t) = \begin{cases} \left| x_i(t) - \frac{[V_i(t)]^2}{2U_i^+} \right| & \text{при } V_i(t) < 0, \\ \left| x_i(t) - \frac{[V_i(t)]^2}{2U_i^-} \right| & \text{при } V_i(t) > 0, \end{cases} \quad (20a)$$

где U_i^+ и U_i^- соответствуют абсолютному максимуму и минимуму управления в i -м контуре.

Для двух контуров управления матрица (8) имеет вид

$W_{II} \wedge W_I$	U_1^+	$U_2^+(U_1^+)$
	U_1^-	$U_2^-(U_1^-)$
	U_1^+	$U_2^+(U_1^+)$
	U_1^-	$U_2^-(U_1^-)$
$W_{II} \wedge W_I$	$U_1^+(U_2^+)$	U_2^+
	$U_1^-(U_2^-)$	U_2^-
	$U_1^+(U_2^-)$	U_2^-
	$U_1^-(U_2^+)$	U_2^+

(21)

Конкретные значения управлений в матрице определяются из условий работы системы. Обычно непрерывная группа прокатного стана состоит из шести клеток, причем одна из средних клеток имеет постоянную, а остальные — регулируемую скорость вращения.

Из равенства передаточных функций приводов клеток следует равенство экстремальных значений управляющих сигналов отдельных клеток. Если валки клетки I имеют постоянную скорость вращения, а скорости клеток 2 и 3 регулируются (рис. 1), то матрица управлений (21) в данной системе имеет вид

	sign x_1	sign x_2	I	II
$W_{II} \wedge W_I$	—	—	+ u	0
	—	+	+ u	— $2u$
	+	+	— u	0
	+	—	— u	+ $2u$
$W_{II} \wedge W_I$	—	—	— u	+ $2u$
	—	+	— u	+ $2u$
	+	—	+ u	— $2u$
	+	+	+ u	— $2u$

(22)

Здесь, + u и — u значения наибольшего ускоряющего и тормозящего сигналов приводов соответственно; $x_i > 0$ означает избыток, а $x_i < 0$ — недостаток натяжения в i -м контуре. Интересной особенностью матрицы (22) является возможность реализации в обоих контурах экстремальных сигналов при $x_1 = -x_2$.

По аналогии с (22) может быть составлена матрица управлений для другого числа контуров.

Как показали исследования на модели системы, приведенной на рис. 1, предложенный способ управления имеет значительные преимущества перед существующим.

3. Исследование процессов регулирования в системе со связью по управлению

Рассмотрим режим работы системы, состоящей из двух контуров регулирования с передаточными операторами

$$F_1(p) = F_2(p) = \frac{1}{p^2} \quad (23)$$

и матрицей управлений (21), где знаки всех управлений совпадают с требуемыми из расположения изображающих точек на совмещенной фазовой плоскости, т. е. $U_i^+ > 0$, $U_i^- < 0$, $U_i^+(U_j^-) > 0$, $U_i^-(U_j^+) > 0$, $U_i^-(U_j^-) < 0$, $U_i^+(U_j^+) < 0$.

Пусть функции сравнения $W_i(t)$ определяются согласно (18). В случае, когда $W_1(t) \neq W_2(t)$, работа рассматриваемой системы определяется соотношением (23) и матрицей управлений (21) и не нуждается в подробном рассмотрении. Интерес представляют режимы работы в системе, связанные с осуществлением равенства

$$W_1(t) = W_2(t) \quad (24)$$

при различном расположении изображающих точек (соответствующих двум контурам) на совмещенной фазовой плоскости.

1. Обе изображающие точки находятся в области разгона. Пусть в момент времени t_k осуществилось равенство (24). Тогда при дальнейшем протекании процесса до выхода одной из изображающих точек в область торможения величина $W_1(t) - W_2(t)$ будет периодически изменяться с периодом $T = \text{const}$ (см. Приложение).

2. Обе точки находятся в области торможения. При осуществлении равенства (23) в системе возникает скользящий режим, характеризующийся бесконечной частотой перераспределений управлений. Каждая точка в скользящем режиме получает управление меньше, чем абсолютный экстремум, перерегулирование увеличивается. Скользящий режим описывается системой уравнений (см. Приложение).

$$\frac{dV_1}{dt} = U_1^- z + U_1^-(U_2^-)(1-z), \quad \frac{dV_2}{dt} = U_2^-(U_1^-)z + U_2^-(1-z), \quad (25)$$

где

$$z = \frac{V_2 \left(1 - \frac{U_2^-}{\beta_2^-}\right) - V_1 \left(1 - \frac{U_1^-(U_2^-)}{\beta_1^-}\right)}{V_1 \frac{U_1^-(U_2^-) - U_1^-}{\beta_1^-} - V_2 \frac{U_2^- - U_2^-(U_1^-)}{\beta_2^-}}$$

$V_1(t)$ и $V_2(t)$ — скорости, соответствующие первой и второй характеристическим точкам.

Величины в правой части (25) представляют собой результирующие управления в скользящем режиме.

В частном случае, если в (21)

$$|U_i^+| = |U_i^-|, \quad U_1 = U_2 = U_m, \quad U_1(U_2) = U_2(U_1) = U_n, \quad (26)$$

то при условии $U_n = 0$ решение (25) имеет вид

$$V_1 = \frac{-U_m V_1^\circ}{V_1^\circ + V_2^\circ} t + V_1^\circ, \quad V_2 = \frac{-U_m V_2^\circ}{V_1^\circ + V_2^\circ} t + V_2^\circ, \quad (27)$$

где V_1° и V_2° — скорости точек, при которых впервые в области торможения осуществлялось равенство (24).

Из (27) легко увидеть, что в скользящем режиме скорости обеих изображающих точек стремятся стать равными друг другу: если $V_1^\circ \neq V_2^\circ$, то точка, обладающая большей скоростью, получает большее торможение; если же $V_1^\circ = V_2^\circ$, то обе точки продолжают движение с равными скоростями и торможениями, причем каждое из результирующих торможений в данном случае равно $0,5 U_m$.

3. Одна из изображающих точек в области разгона, другая — в области торможения.

Пусть в момент времени $t = t_k$ равенство (24) выполняется и затем, согласно новому соотношению функций $W_i(t)$, произошло перераспределение управлений. В случае, когда функции сравнения определяются из (20), дальнейших перераспределений не будет, так как при $t > t_k$ одна из изображающих точек будет иметь $W < W(t_k)$, а другая $W > W(t_k)$. Если функции $W(t)$ определяются из (18), то возможен скользящий режим, уравнение которого выводится аналогично второму случаю (см. Приложение).

Определяя функции сравнения контуров в области торможения (18), исходим из величины будущего перерегулирования. При этом, однако, не учитывается возможность возникновения скользящего режима, приводящего к уменьшению торможения (по сравнению с экстремальным) в каждом из контуров и тем самым — к увеличению перерегулирований. В связи с этим возникает необходимость определения максимально возможных перерегулирований в системе и выбора параметров системы, обеспечивающих перерегулирования, не превосходящие требуемой величины. При заданных кривых сравнения и линиях переключения и известных начальных отклонениях в контурах можно при помощи (21), (23), (25) определить величину перерегулирования в системе. Однако этот путь представляется громоздким. Наиболее рациональным является получение верхней оценки величины перерегулирования в системе. При этом ограничим рассмотрение случаем отработки начальных рассогласований $x_1(0)$ и $x_2(0)$ при следующих условиях:

$$V_1(0) = V_2(0) = 0, \quad |x_1(0)| \leq X_{\max}, \quad |x_2(0)| \leq X_{\max},$$

где X_{\max} — заданная величина.

Обозначим оценку перерегулирования сверху $\alpha_{\max} \geq \alpha$, где α — величина перерегулирования в процентах от X_{\max} . Определим, например, значения α_{\max} для системы (23) с матрицей управления (22) с функциями сравнения (18), кривыми сравнения (19), линиями переключения (17) при условиях

$$U_k^+ = |U_k^-| = u \quad \text{для первого контура;}$$

$$U_k^+ = |U_k^-| = 2u \quad \text{для второго контура;}$$

$$\beta_i^+ = |\beta_i^-|.$$

Пусть $x_2(0) = X_{\max}$ и второй контур имеет управление $2u$ до момента попадания его изображающей точки на линию переключения. Очевидно, что скорость второго контура при переходе изображающей точки в область торможения будет наибольшей скоростью, при которой любая из изображающих точек может попасть в область торможения. Если контур, имеющий эту скорость, попадает в скользящий режим с минимально возможным результирующим ускорением, то полученное при этом перерегулирование будет наибольшим для данной системы, т. е. искомой верхней оценкой.

Определим теперь наименьшее результирующее ускорение для второй точки. Из (25) при условии $\beta_1/\beta_2 = U_1^-/U_2^-$ получим:

$$\frac{dV_1}{dt} = -uz, \quad \frac{dV_2}{dt} = -(2-3z)u, \quad (28)$$

где

$$z = \frac{V_1\beta_1 + V_2(u - \beta_1)}{V_1u + V_2 \frac{3}{2}u}.$$

Очевидно, что с увеличением z результирующее торможение первой точки увеличивается, а второй — уменьшается. Определим значение V_2 , при котором $z = z_{\text{макс}}$. Из условия $\partial z / \partial V_2 = 0$ следует $V_2 = 0$, что дает значение $z_{\text{макс}} = \beta_1 / u$. Наименьшее результирующее торможение второй точки

$$\left(\frac{dV_2}{dt}\right)_{\text{мин}} = -2u + 3\beta_1.$$

Теперь нетрудно определить верхнюю оценку перерегулирования в системе

$$\alpha_{\text{макс}} = \frac{u}{2u - 3\beta_1} - 0,5. \quad (29)$$

Считая величину u известной, можно при помощи (29) определить по заданной величине $\alpha_{\text{макс}}$ требуемые значения β_1 и β_2 , т. е. определить параметры системы, обеспечивающие перерегулирование $\alpha \leq \alpha_{\text{макс}}$.

4. Моделирование системы

Основные результаты работы были проверены моделированием системы со связью по управлению на аналоговой моделирующей установке ЭМУ-8. Для проверки характера основных режимов в системах со связью по управлению была исследована работа системы (23) с матрицей (26). На осциллограммах (рис. 3) показаны на совмещенной фазовой плоскости режимы работы системы при разных начальных условиях.

Основной целью моделирования было сравнение работы прокатного стана при учете связи по управлению и без учета ее. Моделировалась работа трех клеток прокатного стана (рис. 1) с передаточными операторами (23). Работа системы без учета связи по управлению описывается матрицей

sign x_1	sign x_2	I	II
—	—	u	0
—	+	u	$-2u$
+	—	$-u$	$+2u$
+	+	$-u$	0

(30)

где приняты обозначения, использованные при составлении матрицы управлений (22). Работа системы при учете связи по управлению описывается матрицей управлений (22).

На основе указанных выше предположений о расположении оптимальной траектории были выбраны следующие показатели для сравнения работы систем:

$$\int_0^t |x(t)_{\text{макс}}| dt \quad \text{и} \quad \int_0^t [x(t)]_{\text{макс}}^2 dt, \quad (31)$$

где

$$x(t)_{\max} = \max [x_1(t), x_2(t)].$$

Первоначально в обоих контурах кривая сравнения совпадала с линией переключения, причем линия переключения была выбрана из условия оптимальной по быстродействию обработки рассогласования в данном контуре при нулевом отклонении в другом контуре. При этих условиях перерегулирование в системе составляло около 45% от наибольшего начального отклонения в контурах. Была поставлена задача уменьшения величины перерегулирования до 25—30%. Величины β_1, β_2 в уравнениях кривых сравнения для обоих контуров определялись при помощи (29).

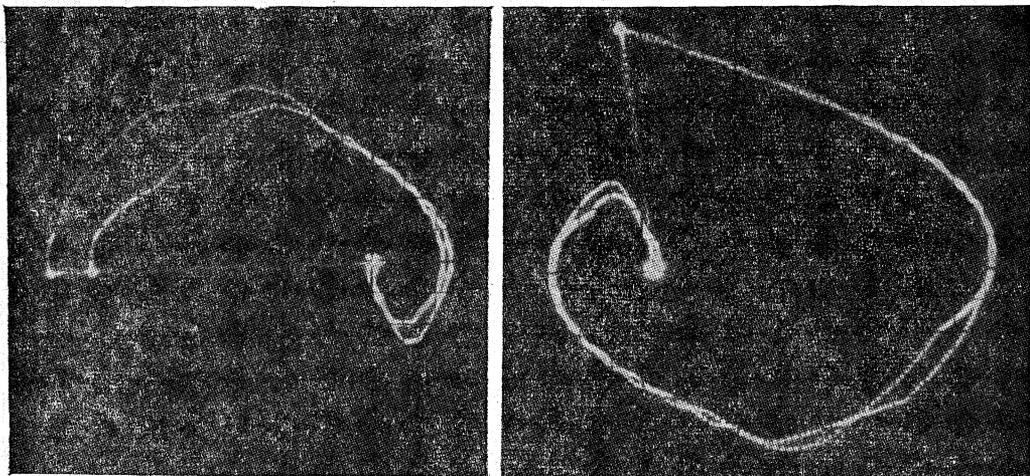


Рис. 3

Для требуемого значения $\alpha_{\max} = 30\%$ X_{\max} : $\beta_1 = 0,25 u$; $\beta_2 = 0,5 u$. В контурах системы были реализованы значения $\beta_1 = 0,4$; $\beta_2 = 0,8$. Полученное значение перерегулирования не превышало 25%. При исследовании на модели выяснилось, что из-за попадания в скользящий режим вблизи положения равновесия длительность процесса увеличивалась, увеличивались значения выбранных показателей сравнения (31). Поэтому была использована схема, в которой при малых отклонениях в контурах система переходила на режим работы с матрицей управления (30), т. е. без учета связи по управлению. Такой режим работы был назван комбинированным. Осциллограмма на рис. 4, а показывает работу системы без учета связи по управлению, на рис. 4, б с учетом связи, а на рис. 4, в — комбинированный режим работы. На рис. 5 приведены результаты сравнения по выбранным показателям (31) работы системы без учета связи по отклонению (кривая 1), с учетом связи по отклонению (кривая 2) и при комбинированном режиме работы (кривая 3) (по оси абсцисс отложено отношение начальных отклонений в контурах $k_1 = x_1(0)/x_2(0)$; $k_2 = x_2(0)/x_1(0)$). Из полученных результатов очевидна важность рационального распределения ограниченных управлений в многосвязных системах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Рассмотрим поведение двухконтурной системы (23), (24), когда изображающие точки обоих контуров находятся в области разгона.

Пусть при $t = t_k$ равенство (24) выполняется для $|V_2^\circ| > |V_1^\circ|$, откуда следует, что при $t < t_k$ было $W_2(t) > W_1(t)$. Очевидно, что при движении точек с имеющимися

управлениями при $t > t_k$:

$$W_2(t) < W_1(t).$$

Следовательно, при $t = t_k$, если пренебречь запаздыванием, произойдет перераспределение уравнений, согласно (21). Примем теперь $t = t_k$ за начало отсчета и определим время t_1 , когда вновь осуществится равенство (24). Не уменьшая общности, можно считать, что $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, откуда следует

$$x_1(t_1) = x_1(t_k) \mp V_1(t_k)t_1 \mp U_1^+ \frac{t_1^2}{2},$$

$$x_2(t_1) = x_2(t_k) \mp V_2(t_k)t_1 \mp U_2^+(U_1^+) \frac{t_1^2}{2}.$$

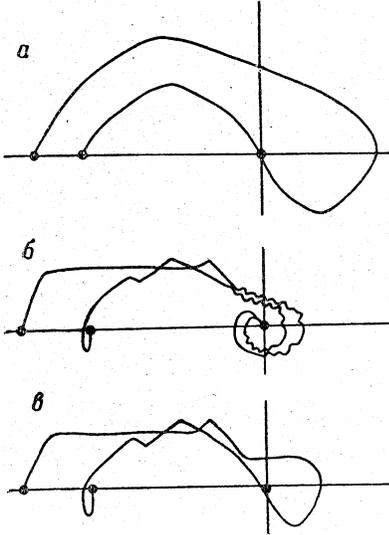


Рис. 4

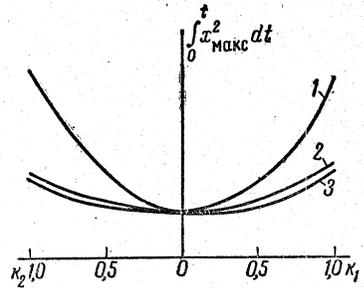
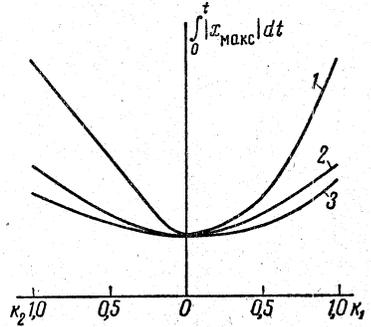


Рис. 5

Используя (24), получим

$$t_1 = \frac{2 [V_2(t_k) - V_1(t_k)]}{U_1^+ - U_2^+(U_1^+)}.$$

Принимая $t = t_k \mp t_1$ за начало движения, аналогично найдем отрезок времени до следующего перераспределения управлений:

$$t_2 = \frac{2 [V_2(t_k) - V_1(t_k)]}{U_2^+ - U_1^+(U_2^+)}.$$

Действуя подобным образом, получим

$$t_{2n-1} = \frac{2 [V_2(t_k) - V_1(t_k)]}{U_1^+ - U_2^+(U_1^+)}, \quad t_{2n} = \frac{2 [V_2(t_k) - V_1(t_k)]}{U_2^+ - U_1^+(U_2^+)},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, отрезок времени $T = t_{2n+1} \mp t_{2n} = \text{const}$.

Величина T зависит только от матрицы управлений (21) и от расположения точек при первом перераспределении.

2. Рассмотрим случай, когда в момент времени $t = t_k$ осуществилось равенство (24) при расположении обеих точек в области торможения. Без ущерба для общности результатов будем считать, что $V_1, V_2 > 0$.

Примем, что при $t < t_k$ было $W_1(t) > W_2(t)$. Тогда на интервале времени

$$t_k \leq t \leq t' = t_k \mp \lambda(t_k) \Delta t,$$

где Δt — бесконечно малая величина, а $0 \leq \lambda(t_k) \leq 1$, сохранится абсолютный экстремум управления в первом контуре

$$W_i(t') = W_i(t_k) + \frac{dW_i(t_k)}{dt} \lambda(t_k) \Delta t.$$

Определим dW_i/dt в области торможения.

Согласно (18), получим

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = |V_i(t)| \left(1 - \frac{U_i^-(t)}{\beta_i} \right). \quad (32)$$

Используя (32), получим

$$W_1(t') = W_1(t_k) + V_1(t_k) \left(1 - \frac{U_1^-}{\beta_1} \right) \lambda(t_k) \Delta t,$$

$$W_2(t') = W_2(t_k) + V_2(t_k) \left(1 - \frac{U_2^-(U_1^-)}{\beta_2} \right) \lambda(t_k) \Delta t.$$

Поскольку $W_2(t') > W_1(t')$, при $t = t'$ произойдет перераспределение управлений, обеспечивающее абсолютный экстремум управления во втором контуре и приводящее к выполнению равенства (24) в момент $t = t_k + \Delta t$. При $t = t_k + \Delta t$ получим

$$W_1(t_k + \Delta t) = W_1(t') + V_1(t_k) \left(1 - \frac{U_1^-(U_2^-)}{\beta_1} \right) [1 - \lambda(t_k)] \Delta t,$$

$$W_2(t_k + \Delta t) = W_2(t') + V_2(t_k) \left(1 - \frac{U_2^-}{\beta_2} \right) [1 - \lambda(t_k)] \Delta t.$$

Из равенства (24) при $t = t_k + \Delta t$ следует

$$V_1(t_k) \left(1 - \frac{U_1^-}{\beta_1} \right) \lambda(t_k) + V_1(t_k) \left(1 - \frac{U_1^-(U_2^-)}{\beta_1} \right) [1 - \lambda(t_k)] =$$

$$= V_2(t_k) \left(1 - \frac{U_2^-(U_1^-)}{\beta_2} \right) \lambda(t_k). \quad (33)$$

В (33) V_1 , V_2 и λ являются неизвестными функциями времени. Прибавив к (33) два уравнения движения, получим систему уравнений (25). После несложных преобразований можем получить из (25) для неизвестных V_1 и V_2 дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Поступила в редакцию
11 февраля 1963 г.

Цитированная литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд. иностр. литер., 1960.
2. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II, III. Автоматика и телемеханика, т. XX, №№ 10—12, 1959.
3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I, II, III. Автоматика и телемеханика, т. XXI, №№ 4—6, 1960.
4. Файберг Ю. М. и Зеленов А. Б. Регулирование электропривода непрерывных станов горячей прокатки. Металлургиздат, 1956.

ABOUT SUB-OPTIMAL CONTROL OF MULTI-VARIABLE SYSTEMS WITH CONTROL CONNECTIONS

O. I. LARICHEV, I. I. PERELMAN

A multi-variable control system is considered in which the connection among separate loops is due to the general restriction applied to loop control functions. A way of the sub-optimal control of the system is proposed for a case when there are only suppositions concerning a desirable process character but no precise quality criterion.

The investigation described is applied to a system of the stabilization of the strip tension in a continuous rolling mill.