

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ**А. Н. КОЖУХАРОВ, О. И. ЛАРИЧЕВ**

(Москва)

Рассматривается задача распределения n объектов среди n субъектов, причем как объекты, так и субъекты имеют оценки по N качественным критериям с порядковыми шкалами. Имеется руководитель, ответственный за решение данной задачи. В качестве критерия решения задачи рассматривается выбор наиболее близких по своим векторным характеристикам пар «объект — субъект». Предложен человеко-машинный алгоритм решения, в котором используются предпочтения руководителя.

1. Постановка задачи

Среди задач управления организационными системами весьма распространенной является задача распределения прав, обязанностей, работ, благ между членами коллектива при наличии лица, ответственного за это распределение.

Рассмотрим, например, задачу распределения молодых специалистов по местам работы.

Каждый из специалистов может быть охарактеризован такими оценками по группе критериев, как, например, способность к исследовательской работе, склонность к организационной работе, семейное положение и т. д. С другой стороны, каждое из мест работы, нуждающееся в специалисте, может выдвинуть ряд требований к нему, как, например, характер работы, уровень профессиональной квалификации и т. д. Каждое из мест работы может быть охарактеризовано также такими оценками, как географическое положение, возможность предоставления жилплощади и т. д.

Имеется комиссия по распределению, принимающая окончательное решение. В ее обязанности входит не просто обеспечение предприятий работниками, а учет интересов обеих сторон. Действительно, в государственных интересах, чтобы каждый специалист нашел себе подходящее место работы и каждое место нашло себе подходящего специалиста.

В качестве другого примера рассмотрим задачу, с которой на практике встретились авторы данной работы. Через отдел подготовки рукописей крупного издательства проходит множество рукописей книг. Эти рукописи необходимо распределять между сотрудниками отдела. Каждая рукопись может быть охарактеризована оценками по таким критериям, как важность, срочность выполнения, тематика. В свою очередь, сотрудники могут быть охарактеризованы оценками по таким критериям, как качество работы, индивидуальная «пропускная способность», предпочитаемая тематика и т. д.

Ясно, что как производительность труда, так и атмосфера справедливости зависит от того, насколько возможности каждого сотрудника, отраженные в его характеристиках, были учтены при распределении работ.

Это не может не учитывать руководитель отдела, ответственный за распределение работ.

Итак, в качестве принципиальных, отличительных черт рассматриваемых задач можно выделить следующие.

1. Каждый исполнитель и каждая работа характеризуются вектором оценок по совокупности критериев. Критерии оценки исполнителя и работы имеют как бы «зеркальный» характер — одному (или нескольким) критерию, характеризующему требования, предъявляемые работой, соответствует один (или несколько) критерий, характеризующий возможности исполнителя. В качестве таких пар критериев в задаче распределения рукописей выступают, например, критерий «тематика рукописи» и «предпочитаемая тематика сотрудника». Критерию «важность рукописи» соответствует критерий «качество работы исполнителя», и т. д.

Отметим также, что большинство таких критериев имеют качественный, субъективный характер, шкалы их оценок чаще всего имеют вид словесных формулировок. Фактически пары «зеркальных» критериев имеют общую шкалу оценок, хотя каждая из оценок этой шкалы имеет две формулировки.

2. Второй важной особенностью рассматриваемой задачи является наличие лица, принимающего решения (ЛПР). Однако его роль в данной задаче иная, чем в обычных задачах принятия индивидуальных решений. В типичных задачах принятия решений на основе предпочтений ЛПР понятие лучшей или худшей альтернативы определяется субъективной моделью принятия решений [1]. В рассматриваемых задачах рациональное ЛПР не может не учитывать возможности выполнения работ исполнителями, определяемые их характеристиками. В самом деле, пусть в рассматриваемой задаче встретилась ситуация, когда все работы (объекты) и исполнителей (субъекты) можно разбить попарно так, что: а) для каждого субъекта требования «своего» объекта точно соответствуют его возможностям, а требования других не соответствуют; б) для каждого объекта «свой» субъект полностью удовлетворяет его требованиям, а прочие не удовлетворяют. Ясно, что в данной ситуации имеется совокупность очевидных назначений, состоящих из наиболее близких пар объект — субъект. Очевидно, что в данной ситуации рациональное ЛПР признает такие назначения наилучшим решением проблемы, хотя при этом оно никак не участвует в ее решении. Отношение ЛПР к решаемой проблеме можно определить в данном случае следующей фразой: «Я не вмешиваюсь, если все устроится само собой наилучшим образом».

Но имеются ситуации, когда вмешательство ЛПР необходимо.

В общем случае в рассматриваемой задаче не существует очевидных назначений. В связи с этим возникают проблемы следующего вида: а) к какому из нескольких объектов ближе по характеристикам конкретный субъект? б) к какому из нескольких субъектов ближе по характеристикам конкретный объект? Ответы на эти вопросы могут быть определены при помощи специальных процедур получения информации от ЛПР. Итак, роль ЛПР состоит в определении назначений для случаев, отличающихся от идеального.

Учет приведенных выше особенностей позволяет сформулировать многокритериальную задачу о назначениях. Имеются n субъектов и n объектов, каждый из которых характеризуется совокупностью оценок по N критериям. Эти оценки определены экспертами так, что каждый субъект и объект имеют одну оценку по каждому из критериев. Имеется лицо, принимающее решение, — руководитель, ответственный за решение задачи о назначениях. Необходимо определить n наиболее близких по своим характеристикам пар «объект — субъект» (точное определение близости будет дано далее).

Сформулированной выше задаче нами дано название многокритериальной задачи о назначениях. Естественно, что она принципиально отличается

ся от известной в исследовании операций задачи о назначениях [2, 3]. Более близкими к ней по постановке являются известные задачи принятия коллективных решений — задача «о женихах и невестах», о распределении n работ и т. д. [4–7], где, по сути дела, используется тот же критерий качества решения: наибольшее число взаимно удовлетворенных участников. Однако принципиальное отличие нашей постановки заключается в участии ЛПР в решении проблемы. В целом сформулированная выше проблема занимает промежуточное положение между задачами принятия индивидуальных и коллективных решений: ЛПР принимает критерий, характерный для задач принятия коллективных решений [6] и учитывающий в первую очередь не общесистемные соображения, а интересы членов коллектива.

2. Основные идеи решения многокритериальной задачи о назначениях

Существенные трудности решения рассматриваемой задачи заключаются в наличии многих критериев оценки объектов и субъектов, в необходимости рассмотрения задач с достаточно большим числом субъектов и объектов и в стремлении построить такой метод решения, когда информация от ЛПР использовалась бы в минимально возможной степени.

Основная идея излагаемого далее подхода к решению многокритериальной задачи о назначениях заключается в декомпозиции рассматриваемой проблемы. Хотя каждый из рассматриваемых субъектов и объектов имеет оценки по N критериям, его характеристики рассматриваются не абсолютно, а относительно. Для каждого объекта определяется степень соответствия его требованиям характеристик всех субъектов и, наоборот, для каждого субъекта определяется его соответствие требованиям всех объектов. На основе анализа таких соответствий делается попытка определить назначения.

Разработанный метод решения включает в себя два важных этапа. Первый этап — этап формального анализа — проводится без участия ЛПР. На этом этапе на основе информации об объектах и субъектах определяются идеальные назначения, если таковые существуют. Второй этап состоит в получении дополнительной информации от ЛПР и определении на ее основе наиболее близких по своим характеристикам пар объект — субъект.

3. Формальный анализ

Введем необходимые обозначения.

Обозначим через O_i множество объектов ($i=1, 2, \dots, n$), а через C_i — множество субъектов ($i=1, 2, \dots, n$). Пусть O_i^j — оценка i -го объекта по j -му критерию, а C_i^j — оценка i -го субъекта по j -му критерию ($j=1, 2, \dots, N$). Далее будут рассматриваться дискретные шкалы оценок. Причина этого состоит в том, что в задаче о назначениях многие критерии имеют качественный, субъективный характер. Для таких критериев характерны шкалы с небольшим числом качественных словесных оценок [8, 9], причем обычно число таких оценок невелико (3–5). Отметим, что во многих задачах принятия решений непрерывные шкалы могут быть заменены дискретными с формулировками, отражающими степени качества, различимые для ЛПР. Далее предполагается, что оценки на шкалах упорядочены от лучшей к худшей. Если α_j — номер оценки на шкале j -го критерия, то при $j=1$ имеем худшую оценку.

Пусть имеется объект O_i с оценками $O_i^1, O_i^2, \dots, O_i^N$ и субъект C_i с оценками $C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^N$ (где O_i^v, C_i^v — номера оценок на шкалах v -го и θ -го критериев).

Определим j -ю компоненту вектора соответствия характеристик i -го субъекта требуемым характеристикам v -го объекта в следующем виде:

$$(1) \quad \bar{C}_{iv}^j = \begin{cases} 0, & \text{если } O_v^j \leq C_i^j, \\ R(O_v^j, C_i^j), & \text{если } O_v^j > C_i^j, \end{cases}$$

где $R(O_v^j, C_i^j)$ — количество оценок на шкале j -го критерия, на которое O_v^j превышает C_i^j . Вектор $\bar{C}_{iv}$ определяет «степень неудовлетворения» i -м субъектом требованиям, «предъявляемым» v -м объектом.

Определим j -ю компоненту вектора соответствия характеристик k -го объекта требованиям m -го субъекта в виде

$$(2) \quad \bar{O}_{km}^j = \begin{cases} 0, & \text{если } C_m^j \geq O_k^j, \\ -R(O_k^j, C_m^j), & \text{если } C_m^j < O_k^j. \end{cases}$$

Вектор $\bar{O}_{km}$ определяет «степень неудовлетворения» m -м субъектом характеристиками k -го объекта.

Формулы (1) и (2) соответствуют типичному для задачи о назначении пониманию оценок объекта как уровня требований, предъявляемых к характеристикам субъекта, назначаемого на этот объект. С другой стороны, оценки субъекта рассматриваются как его возможности.

Естественно принять, что после удовлетворения уровню требований оценки субъекта являются «одинаково хорошими» для объекта, и наоборот.

Для v -го объекта могут быть найдены векторы соответствия $\bar{C}_{1v}, \bar{C}_{2v}, \dots, \dots, \bar{C}_{nv}$.

Введем следующее бинарное отношение (отношение B_1): вектор $\bar{C}_{iv}$ доминирует над вектором $\bar{C}_{pv}$, если

$$(3) \quad \bar{C}_{iv}^j = \bar{C}_{pv}^j, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

причем хотя бы для одной компоненты справедливо строгое неравенство.

Вектор $\bar{C}_{iv}$ эквивалентен вектору $\bar{C}_{pv}$, если

$$(4) \quad \bar{C}_{iv}^j = \bar{C}_{pv}^j, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Векторы $\bar{C}_{iv}$ и $\bar{C}_{pv}$ несравнимы, если не выполняется (3) или (4).

В соответствии с бинарным отношением B_1 на элементах $\bar{C}_{1v}, \bar{C}_{2v}, \dots, \dots, \bar{C}_{nv}$ может быть построен граф T_v , в котором дугой, направленной от $\bar{C}_{iv}$ к $\bar{C}_{pv}$, отражается отношение доминирования (3), дугой с двумя противоположными стрелками — отношение эквивалентности (4), а отсутствием дуги — отношение несравнимости.

Для m -го субъекта могут быть определены в соответствии с (2) векторы $\bar{O}_{1m}, \bar{O}_{2m}, \dots, \bar{O}_{nm}$.

Введем бинарное отношение B_2 между этими векторами: вектор $\bar{O}_{km}$ доминирует над вектором $\bar{O}_{im}$, если

$$(5) \quad \bar{O}_{km}^j \geq \bar{O}_{im}^j, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

причем хотя бы для одной компоненты справедливо строгое неравенство.

Векторы $\bar{O}_{km}$ и $\bar{O}_{im}$ эквивалентны, если

$$(6) \quad \bar{O}_{km}^j = \bar{O}_{im}^j, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Векторы $\bar{O}_{km}$ и $\bar{O}_{im}$ несравнимы, если не выполняются (5) и (6).

В соответствии с бинарным отношением B_2 на элементах $\bar{O}_{1m}, \bar{O}_{2m}, \dots, \bar{O}_{nm}$ может быть построен граф S_m , в котором дугой, направленной от $\bar{O}_{km}$ к $\bar{O}_{im}$, отражается отношение доминирования (5), дугой с двумя противоположными стрелками — отношение эквивалентности (6), а отсутствием дуги — отношение несравнимости.

Графы T_v, S_m ($v, m=1, 2, \dots, n$) содержат ценную информацию о сходстве объектов и субъектов. Назовем их графами подобия. Для выявления этой информации необходим анализ графов подобия.

3.1. Анализ графов подобия

Цель анализа состоит в разделении вершин графов подобия на группы с использованием бинарных отношений между ними.

Выделим в графе подобия вершины, в которые не входят однонаправленные дуги. По сути дела, выделенные элементы либо доминируют над всеми или частью остальных, либо несравнимы с ними, т. е. являются множеством Парето в пространстве критериев. Назовем выделенные вершины ядром 1-й степени. Если элементы ядра 1-й степени несравнимы, то им присваивается индекс H_1 ; если они эквивалентны, то им присваивается индекс D_1 .

Удалим из графа подобия вершины, входящие в ядро 1-й степени, и аналогично предыдущему выделим среди оставшихся вершин ядро 2-й степени. При числе ядер, большем двух, и эквивалентности вершин, входящих в ядро 2-й степени, им присваивается индекс D_2 , а при несравнимости — индекс H_2 .

Процесс выделения ядер продолжается до исчерпания вершин графа подобия. При числе ядер, равном двум, вершинам второго ядра присваивается индекс D_2 , если выполняются два условия: а) эти вершины эквивалентны, б) все вершины 1-го ядра доминируют над вершинами 2-го ядра. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то вершинам 2-го ядра присваивается индекс H_2 . Легко увидеть, что для всех ядер, кроме последнего, индекс D_i означает факт доминирования вершин i -го ядра над вершинами $(i+1)$ -го ядра.

Нетрудно убедиться, что при отсутствии циклов в графе этот процесс конечен и заканчивается не более чем за n шагов.

Нетрудно показать справедливость следующей леммы.

Лемма. Графы подобия не содержат циклов.

Доказательство. Допустим, что на вершинах графа подобия T_v имеется цикл

$$(7) \quad \bar{C}_{iv} \rightarrow \bar{C}_{kv} \rightarrow \dots \bar{C}_{jv} \rightarrow \bar{C}_{iv}.$$

По построению отношения доминирования (3) любая вершина в упорядоченной последовательности $\bar{C}_{iv}, \bar{C}_{kv}, \dots, \bar{C}_{jv}$ должна иметь по всем критериям не худшие оценки, чем все предыдущие, а хотя бы по одному — лучшую. Следовательно, соотношение $\bar{C}_{jv} \rightarrow \bar{C}_{iv}$ невозможно, что и требовалось доказать.

В приложении 1 даны оценки вероятностей того, что между двумя вершинами графа подобия будет отношение доминирования, отношение доминирования по всем критериям, кроме одного или двух, при предположении о равновероятности получения любой из оценок на шкалах критериев для субъектов и объектов. Эти вероятности имеют довольно высокие значения. Так, при шести критериях с тремя оценками на шкалах вероятность доминирования одной вершины над другой равна 0,52. В связи с этим можно предположить, что в реальных ситуациях, когда оценки

групп субъектов и объектов в среднем близки между собой, графы подобия будут содержать большое число дуг.

3.2. Матрица сходства

Информацию, полученную при выделении ядер в графах подобия, удобно анализировать при помощи матрицы сходства M , пример которой приведен на рис. 1.

Столбцы матрицы сходства соответствуют объектам, а строки — субъектам. Клетка, находящаяся на пересечении v -го столбца и m -й строки,

	O_1	O_2		O_n
C_1	$H_3 \diagdown D_1$ H_1	$D_2 \diagdown H_1$ D_2	$D_1 \diagdown H_1$ H_1	$H_3 \diagdown H_2$ H_2
C_2	$H_1 \diagdown D_3$ D_3	$H_1 \diagdown D_1$ D_1	$H_1 \diagdown H_1$ H_1	$H_2 \diagdown H_2$ H_2
	$H_1 \diagdown H_2$ H_2	$D_2 \diagdown D_2$ D_2	$D_2 \diagdown H_1$ H_1	$H_1 \diagdown D_1$ D_1
C_n	$D_2 \diagdown H_1$ H_1	$D_1 \diagdown D_1$ D_1	$D_1 \diagdown H_1$ H_1	$D_1 \diagdown H_3$ H_3

Рис. 1

должна характеризовать оценку v -го объекта со стороны m -го субъекта и оценку m -го субъекта со стороны v -го объекта.

В клетку матрицы M , находящуюся на пересечении v -го столбца и m -й строки, занесены два индекса. В верхней правой части клетки находится индекс, относящийся к графу подобия S_m , а в нижней левой части — индекс, относящийся к графу подобия T_v .

При помощи матрицы сходства M можно формально определить введенное выше понятие очевидного назначения. Очевидному назначению соответствует клетка матрицы сходства с индексами $D_1 \setminus D_1$. Наилучшему решению (n очевидных назначений) соответствует случай, когда после перестановки столбцов и строк можно получить матрицу сходства, на главной диагонали которой находятся все клетки с элементами $D_1 \setminus D_1$.

При заполнении матрицы сходства возможны следующие три случая:

- а) есть хотя бы одна клетка $D_1 \setminus D_1$,
- б) в каком-либо столбце или строке имеются несколько клеток $D_1 \setminus D_1$,
- в) нет клеток $D_1 \setminus D_1$.

В случае а) можно сразу же сделать идеальные назначения и понизить размерность рассматриваемой задачи. После понижения размерности необходимо вернуться к графам подобия T_v , S_m . Выделяемые ядра будут также совсем иными. Далее возникает новая матрица сходства, выделяются (если они существуют) новые очевидные назначения и т. д. Результаты, приведенные в Приложении 1, позволяют предположить, что при небольшом числе (3–4) оценок на шкалах критериев вероятность появления клеток $D_1 \setminus D_1$ является достаточно высокой.

Случай б) означает возможность неединственного решения задачи о назначениях. Этот случай будет рассмотрен далее особо.

В случае в) необходим переход к следующему этапу анализа, на котором используется информация, получаемая от ЛПР.

4. Использование информации ЛПР для решения многокритериальной задачи о назначениях

Цель получения дополнительной информации от ЛПР заключается в установлении новых связей в графах подобия.

В общем случае среди несравнимых вершин графов T_v , S_m содержатся пары вершин, несравнимые по различному числу критериев. Напомним, что ранее рассматривались порядковые шкалы оценок критериев.

Итак, перед ЛПР стоят типовые задачи сравнения следующего вида. Имеются два субъекта (объекта) и объект (субъект). Какой из субъектов (объектов) расположен ближе к объекту (субъекту) в многокритериальном пространстве?

Прежде всего отметим, что для рассматриваемого класса задач чаще всего имеется небольшое число оценок (3–4) на шкалах критериев, а число критериев не превышает 10. Согласно результатам, приведенным в Приложении 1, в этом случае альтернативы в большом количестве случаев несравнимы по малому числу критериев (2–3). Число пар альтернатив в графах подобия, находящихся в отношениях доминирования либо доминирования по всем критериям, кроме одного или двух, в 10–20 раз больше по сравнению со случаем непосредственного сопоставления многокритериальных альтернатив [10].

Для подобных задач наиболее целесообразным является подход, связанный с покритериальным сравнением альтернатив. При таком подходе не ставится цель получения общих оценок полезности альтернатив и сравнения их между собой, а делается попытка получить соотношение полезностей альтернатив на основе сопоставления их оценок по отдельным критериям.

Согласно предложенной методологии [1, 9], любые процедуры выявления предпочтений ЛПР должны предусматривать проверку предпочтений ЛПР на устойчивость и непротиворечивость. В этих процедурах должны в первую очередь использоваться вопросы, для которых вероятность получения надежной информации является наибольшей.

Предлагаемый способ решения на основе информации ЛПР типовых задач сравнения заключается в следующем. Первоначально рассматриваются попарно характеристики (совокупность оценок по критериям) объекта и каждого из субъектов.

Перед ЛПР ставится задача упорядочить по величине падения качества покритериальные отклонения характеристик субъектов от характеристики объекта. Эта задача решается ЛПР путем попарного сопоставления величин падения качества (отклонение от оценок объекта в худшую сторону). Относительно каждой пары отклонений принимается одно из следующих решений: а) одно из падений качества явно превосходит другое, б) они примерно эквивалентны.

Далее ЛПР осуществляет операцию сравнения ОСР-1. Сравнивая упорядоченные по падению качества отклонения для двух субъектов, он определяет, не является ли наибольшее отклонение для какого-либо субъекта столь большим, что один субъект явно доминирует над другим. Если в результате ОСР-1 удастся установить факт доминирования одного субъекта над другим по близости к объекту, то сравнение окончено. Если нет, то ЛПР осуществляет операцию сравнения ОСР-2.

Оно сравнивает поочередно по два (начиная с наибольших) отклонения падения качества для разных субъектов. При этом возможны два результата сравнения: а) падение качества (отклонение от оценки объекта в худшую сторону) для субъекта C_i по критерию γ превосходит по своему значению (потере полезности) падение качества для субъекта C_j по критерию m ; б) оба падения качества эквивалентны (либо примерно эквивалентны).

Если в результате ОСР-2 удастся определить отношения доминирования падений качества одного субъекта над другим, то сравнение окончено. Если нет, то ЛПР осуществляет операцию сравнения ОСР-3. Оно сравнивает одно из падений качества для одного субъекта с совокупностью из двух падений качества для другого, пытаясь получить один из следующих результатов: а) доминирование, б) эквивалентность.

Если в результате ОСР-3 удастся определить отношение доминирования падений качества одного субъекта над другим, то сравнение окончено. Если же после использования ОСР-1, ОСР-2 и ОСР-3 информация, полученная от ЛПР, не позволяет установить большую близость (в пространстве критериев) характеристики одного из субъектов к характеристике объекта, то субъекты объявляются эквивалентными по близости.

При выполнении ОСР-1, ОСР-2 и ОСР-3 ЛПР фактически сравнивает элементы, отличающиеся оценками по 1–3 критериям. Если простые операции сравнения не позволяют явно установить факт доминирования, то субъекты имеют резко отличающиеся характеристики примерно одной величины близости к характеристикам объекта.

Отметим также, что результаты, приведенные в Приложении 1, позволяют сделать вывод о большом проценте случаев (при $n \leq 10$), когда ОСР-1, ОСР-2, ОСР-3 приводят к выводу об отношениях эквивалентности или доминирования.

Информация, полученная от ЛПР приведенным выше способом, позволяет при необходимости перейти от графов подобия T_v , S_m к линейным квазипорядкам $\bar{T}_v$, $\bar{S}_m$ (далее будет показано, что для решения задачи необходима лишь часть этой информации). Каждый объект или субъект в линейном квазипорядке имеет индекс D_i , где i — его ранг. Информация, полученная от ЛПР, непротиворечива, если линейные квазипорядки $\bar{T}_v$, $\bar{S}_m$ взаимно непротиворечивы, т. е. из какой-либо их совокупности нельзя получить квазипорядок, противоречащий оставшимся. Наличие таких противоречий означает, что при получении от ЛПР информации о близости двух объектов (субъектов) к субъекту (объекту) часть информации позволяет сделать вывод о большей близости одного объекта (субъекта), а другая часть — другого. При наличии таких противоречий необходимы повторные опросы ЛПР.

5. Принципиальная возможность решения многокритериальной задачи о назначениях

Информация, содержащаяся в квазипорядках $\bar{T}_v$, $\bar{S}_m$, может быть занесена в матрицу M_1 , аналогичную по своему построению матрице M . На пересечении строки и столбца матрицы M_1 находится клетка $D_j \setminus D_i$, показывающая i -й ранг объекта в линейном квазипорядке, построенном для субъекта, и j -й ранг субъекта в квазипорядке, построенном для объекта. После заполнения матрицы M_1 возникает вопрос принципиального характера: всегда ли имеется возможность сделать очевидные назначения, всегда ли встречаются клетки $D_1 \setminus D_1$? Ответ на этот вопрос дают приведенные ниже результаты.

Теорема 1. Если в каком-либо из графов подобия T_v , S_m имеется вершина с нулевыми оценками по всем критериям, то в матрице M имеется клетка $D_1 \setminus D_1$.

Доказательство. Согласно (3), (5) вершины с нулевыми оценками по всем критериям являются доминирующими на графах подобия T_v , S_m . Согласно (4), (2) такая доминирующая вершина имеется как в графе T_v , так и в графе S_m , причем вектору $\bar{C}_{iv}$ соответствует вектор $\bar{O}_{vi}$. Следовательно, на пересечении v -го столбца и i -й строки матрицы M возникает клетка $D_1 \setminus D_1$, что и требовалось доказать.

В общем случае необходимый результат устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. При непротиворечивости линейных квази порядков $\bar{T}_v$, $\bar{S}_m$ ($v, m=1, 2, \dots, n$) в матрице M_1 всегда найдется хотя бы одна клетка $D_1 \setminus D_1$. Доказательство теоремы дано в приложении 2.

6. Общий алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях

Результаты, изложенные в предыдущих разделах, позволяют предложить общий алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях, блок-схема которого приведена на рис. 2.

Как уже указывалось, первый этап решения задачи — формальный анализ — состоит в построении графов подобия T_v , S_m и матрицы сходства M . При анализе матрицы M определяются очевидные назначения, соответствующие клеткам $D_1 \setminus D_1$, если таковые существуют. При определении очевидных назначений происходит понижение размерности матрицы M , после чего снова ищутся очевидные назначения.

При отсутствии клеток $D_1 \setminus D_1$ наилучшие назначения должны определяться на основании информации, получаемой от ЛПР.

Прежде всего необходимо проверить, не существует ли лексикографический порядок критериев.

Назовем отношением лексикографического упорядочения между i -м критерием и критериями $j, v, \dots, t$ такое отношение, при котором понижение полезности на любую оценку по шкале i -го критерия важнее для ЛПР, чем любые понижения оценок по критериям $j, v, \dots, t$, вместе взятым.

Если все критерии можно расположить в ряд, где каждый предыдущий критерий находится в отношении лексикографического упорядочения по отношению ко всем последующим, то имеется полный лексикографический порядок критериев.

Естественно, информация о наличии частичного или полного лексикографического порядка критериев может существенно увеличить число сравнимых элементов в графах подобия. Поэтому такая информация заставляет вернуться к этапу формального анализа, заново построить графы подобия, матрицу сходства и осуществить поиск очевидных назначений.

Отметим, что этап формального анализа (в том числе с использованием информации о лексикографическом порядке критериев) может быть осуществлен на ЭВМ.

В общем случае этот этап недостаточен для решения многокритериальной задачи о назначениях. Необходимо получение более детальной информации от ЛПР. Как указывалось, целью получения такой информации является определение наилучших назначений. В связи с этим еще до получения информации от ЛПР необходим специальный анализ матрицы M с целью определения возможных наилучших назначений.

Очевидно, что кандидатами на возможные наилучшие назначения являются клетки вида $H_1 \setminus H_1$ или $H_1 \setminus D_1$, $D_1 \setminus H_1$, так как только такие клетки при получении дополнительной информации от ЛПР могут перейти в клетки $D_1 \setminus D_1$, соответствующие наилучшим назначениям. В об-

щем случае от ЛПР требуется лишь информация, позволяющая сравнить вершины первых ядер графов подобия T_v, S_m ; объем этой информации намного меньше, чем объем информации, необходимой для упорядочения всех вершин этих графов.

Кроме того, объем информации, получаемой от ЛПР, существенно зависит от количества вершин первых ядер графов подобия, а также от того,

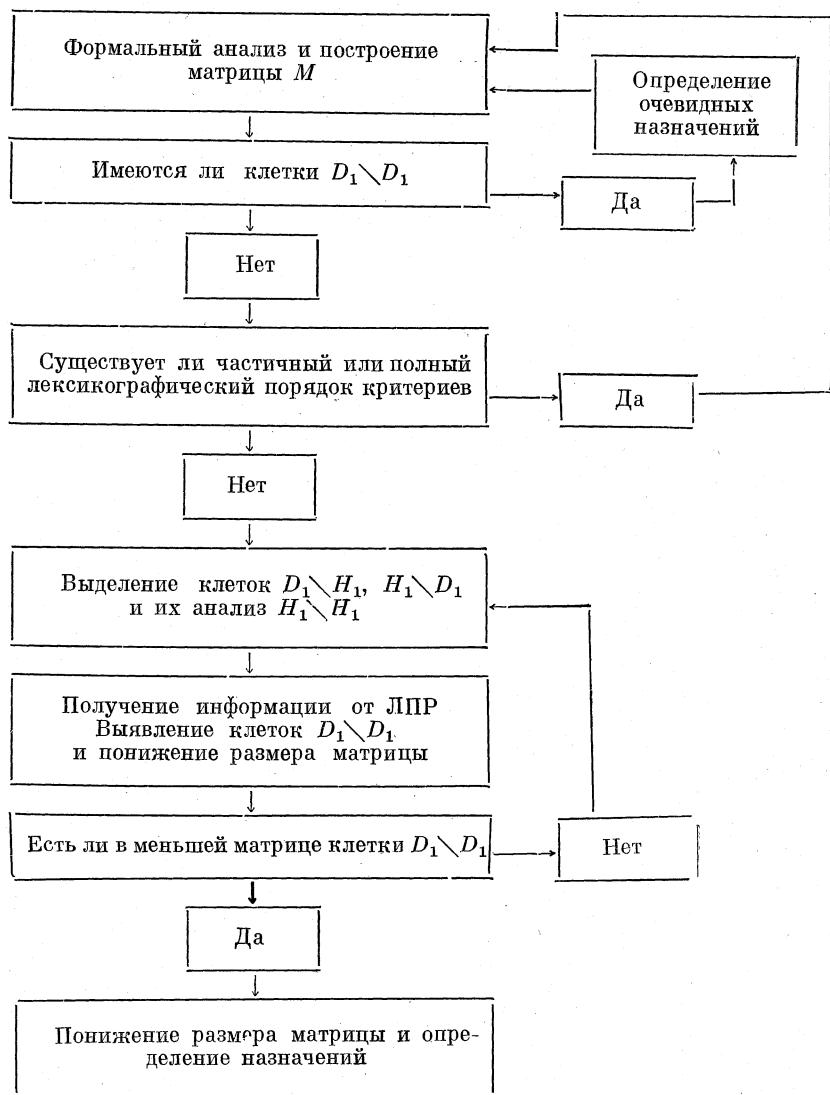


Рис. 2

по какому числу критериев отличаются эти вершины (т. е. какие операции сравнения необходимо использовать).

Итак, после выделения клеток $H_1 \setminus H_1, D_1 \setminus H_1, H_1 \setminus D_1$ для каждой из них проводится анализ первых ядер графов подобия, соответствующих данной строке и столбцу. Определяется, по какому числу критериев отличаются вершины этих ядер, а также количество вершин. Отметим, что данный анализ также может быть осуществлен на ЭВМ.

ЛПР выбирает клетку $H_1 \setminus H_1, D_1 \setminus H_1$ или $H_1 \setminus D_1$, соответствующую наиболее легким и простым операциям сравнения. При этом ЛПР исходит

из того, что после каждого назначения размер матрицы понижается и в новой матрице меньшего размера могут появиться клетки $D_1 \setminus D_1$, т. е. очевидные назначения.

Процесс продолжается до полного решения задачи о назначениях — до определения всех пар субъект — объект. Приведенная выше теорема позволяет утверждать, что предлагаемый метод всегда приводит к решению задачи.

Итак, предложенный метод решения имеет человеко-машинный характер: этапы формального анализа, реализованные в виде программ для ЭВМ, чередуются с этапами получения дополнительной информации от ЛПР.

7. Случай неединственности назначений

Особо следует остановиться на случае возможной неединственности назначений. Как указывалось выше, возможны случаи появления нескольких клеток $D_1 \setminus D_1$ в одной строке или столбце.

В этом случае все возможные отдельные назначения являются эквивалентными и необходимо рассматривать последовательность назначений в целом.

Каждая из клеток $D_1 \setminus D_1$ выбирается по очереди и для нее задача решается до конца (если при ее решении на каком-либо этапе в столбце снова появляется несколько клеток $D_1 \setminus D_1$, то возникает дерево вариантов решения).

Каждый из вариантов решения, состоящий из n назначений, накладывается на первоначальную матрицу M размера $n \times n$. После наложения варианты решения могут быть сравнены между собой по дополнительным критериям.

В качестве таковых, на наш взгляд, целесообразно выбрать следующие.

1. Критерий K_1 качества наихудшего из назначений. Под качеством каждого из назначений понимаем степень его отличия от идеального, определяемую по первоначальной матрице M размера $n \times n$. Сумма индексов σ_i двух элементов каждой клетки матрицы M показывает, в каких ядрах графов подобия, соответствующих строке и столбцу, они находятся. Для клетки $D_1 \setminus D_1$ эта сумма равна 2, т. е. имеет наименьшее значение. Как показатель качества назначения может рассматриваться величина σ_i . Различные решения могут сравниваться между собой по максимуму величины σ_i среди сделанных назначений.

2. Критерий K_2 количества назначений с близкими к максимальному показателю качества $(\sigma_i)_{\max}$.

При сравнении различных решений критерии K_1 и K_2 могут применяться последовательно. Первоначально применяется критерий K_1 , что соответствует принципу: «Определить наилучшее возможное назначение для каждого из субъектов и объектов». При выявлении нескольких решений с одинаковым показателем по критерию K_1 применяется критерий K_2 , что соответствует принципу: «Количество отклонений от очевидных назначений должно быть минимальным».

Приведенный выше способ решения является точным, но требует большого объема вычислений и большой информации от ЛПР при наличии многих клеток $D_1 \setminus D_1$.

В связи с этим целесообразно предложить более простой способ эвристического характера, позволяющего определить назначения при большом числе клеток $D_1 \setminus D_1$ в матрице M .

Этот способ заключается в следующем:

1) выписываются все объекты (список 1), для которых в матрице M имеется одна или несколько клеток $D_1 \setminus D_1$; каждый объект имеет перечень субъектов, соответствующих очевидным назначениям;

Таблица 1

	I	II	III	IV	V
C_1	2	1	3	1	3
C_2	1	3	1	3	1
C_3	3	1	2	2	2
C_4	1	3	3	1	3

Таблица 2

	I	II	III	IV	V
O_1	1	1	1	2	3
O_2	3	2	1	2	1
O_3	1	3	3	1	1
O_4	3	2	3	1	3

2) выписываются прочие объекты (список 2), для каждого из них в соответствующем столбце определяются клетки (или клетка) с наименьшими σ_i ; каждый объект имеет перечень субъектов, соответствующих выделенным клеткам;

3) объекты из списка 1 берутся по очереди в соответствии с увеличением числа субъектов, отвечающих наилучшим назначениям. Из перечня субъектов, соответствующих объекту, выбирается тот, который минимальное число раз входит в другие перечни объектов из списка 1. Естественно, что первоначально определяются назначения для тех случаев, когда в перечни входит один субъект. Если два объекта претендуют на один субъект, то варианты назначений сравниваются по критерию K_i ;

4) после определения назначений для объектов списка 1 аналогично определяются назначения для списка 2.

Конечно, этот способ имеет приближенный характер, но он дает неплохие результаты при большом числе объектов в списке 1.

8. Численный пример

Рассмотрим применение метода на численном примере. Пусть $n=4$ и $N=5$ и каждый критерий имеет по три оценки на шкале. Случайным образом (бросание кубиков) были получены оценки четырех субъектов и четырех объектов, приведенные в табл. 1 и 2.

На основе табл. 1 и 2 строятся графы подобия T_v и S_m ($v, m=1, 2, 3, 4$). Информация, полученная при построении этих графов, может быть представлена в матрице сходства, приведенной на рис. 3. На пересечении четвертой строки и третьего столбца матрицы имеется клетка $D_1 \setminus D_1$, которая определяет очевидное назначение

$$C_4 \Leftrightarrow O_3$$

Новая матрица сходства имеет вид, представленный на рис. 4. В ней имеется четыре клетки $H_i \setminus H_i$.

В графе T_1 , соответствующем первому столбцу, вершины $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ входят в первое ядро. Эти вершины имеют по одному отклонению от характеристик объекта. Обозначим через d отклонение $\bar{C}_1$ от O_1 по 4-му критерию, а через f — отклонение $\bar{C}_2$ от O_1 по 5-му критерию. Так как f соответствуют полной шкале 5 критерия, то в качестве информации ЛПР логично взять: $e \leftarrow f$ или $\bar{C}_1 \rightarrow \bar{C}_2$, что соответствует операции сравнения ОСР-1. В графе S_1 , соответствующем первой строке, вершины $\bar{O}_1$ и $\bar{O}_4$ входят в первое ядро. Вершина $\bar{O}_1$ имеет одно отклонение от характеристик объекта по 4-му критерию, равное l . Вершина $\bar{O}_4$ имеет два отклонения: отклонение g по 1-му критерию и отклонение h по 2-му критерию. Можно принять, что $h \cong g$. Осуществляя ОСР-2, получаем $\bar{O}_1 \rightarrow \bar{O}_4$, что позволяет считать наилучшим назначением $C_1 \Leftrightarrow O_1$.

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	H_1	H_2	H_1	H_1
C_2	H_1	H_1	H_2	D_2
C_3	H_2	H_1	H_3	H_1
C_4	H_1	D_3	D_1	H_2

Рис. 3

	O_1	O_2	O_4
C_1	H_1	H_2	H_2
C_2	H_1	H_1	H_3
C_3	H_2	H_1	H_2

Рис. 4

	O_2	O_4
C_2	D_1	D_2
C_3	D_1	D_2

Рис. 5

Новая матрица сходства имеет вид, представленный на рис. 5. В ней имеются две клетки $H_1 \setminus D_1$. Необходимо сравнить вершины графа S_2 . Вершина C_1 имеет отклонение r по 1-му критерию, а C_3 — отклонение l по 2-му критерию. Применяя ОСР-1, получим $C_3 \rightarrow C_2$, что определяет два наилучших назначения: $C_3 \Leftrightarrow O_2$ и $C_2 \Leftrightarrow O_4$.

9. Возможные обобщения

Рассмотрим ряд возможных обобщений рассмотренной модели и метода решения:

1. Случай неравного числа субъектов и объектов. Этот случай легко свести к рассмотренному ранее. Если число объектов превышает число субъектов, то вводим фиктивные субъекты, имеющие низшие оценки по всем критериям.

Если число субъектов превышает число объектов, то вводим фиктивные объекты, имеющие высшие оценки по всем критериям.

При использовании такого подхода субъекты (объекты), получившие назначения на фиктивные объекты (субъекты), фактически не получают назначения.

2. Случай неравного числа критериев оценки субъектов и объектов. Предположим, что субъекты оцениваются не только по критериям,

общим для объектов и субъектов, но и по ряду дополнительных критериев. Тогда оценки по дополнительным критериям не учитываются при построении графов подобия S_m , а учитываются лишь в графах T_v , т. е. они учитываются при сравнении элементов $\bar{C}_{iv}$ между собой. С учетом этих особенностей алгоритм решения остается тем же. При этом, естественно, предполагается, что многие существенные критерии оценки остаются одинаковыми для субъектов и объектов, что позволяет определять соответствие субъекта требованиям объекта и наоборот.

10. Заключение

Изложенный выше метод был использован для определения назначений «исполнитель — работа» при оперативном планировании в редакционном отделе крупного издательства. Среди трех критериев оценки исполнителей и работ один находился в отношении лексикографического порядка к двум другим, что существенно упростило задачу. Задача решалась при $n=30$. Решение потребовало не более 50 обращений к ЛПР при проведении операций сравнения. Малое число оценок по критериям позволило получить от ЛПР информацию о соотношении типичных отклонений качества по двум критериям и использовать ее в программе ЭВМ.

Следует отметить в заключение, что введение многокритериальности в типичные модели исследования операций делает эти модели жизнеспособными, увеличивает возможности их практического применения. В то же время меняется характер этих моделей, в них появляются субъективные черты, характерные для ЛПР или группы ЛПР. Такой характер модели делает ее удобным и ценным для ЛПР средством анализа сложных жизненных ситуаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Подсчитаем вероятность того, что две вершины графа подобия $T_v \bar{C}_{iv}$ и $\bar{C}_{kv}$ сравнимы между собой. В качестве исходного принимается предположение, что оценки объекта O_v , субъектов C_i и C_k с равной вероятностью могут иметь любую из оценок на шкалах критериев.

Пусть шкала j -го критерия имеет t оценок (1-я — худшая оценка, t -я — лучшая) и оценка $O_v^j = l$. Возможные случаи расположения оценок O_v , C_i , C_k на шкале j -го критерия, при которых оценка C_i выше либо равна оценке C_k , приведены на рис. 6. Очевидно, что четыре аналогичных случая соответствуют тому, что оценка C_k выше или равна оценке C_i .

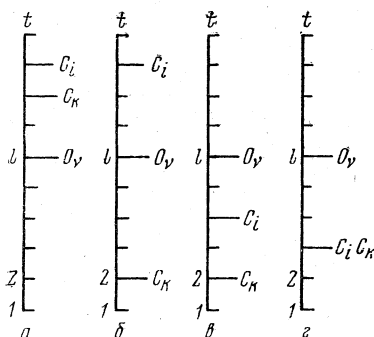


Рис. 6

На рис. 6, а представлен случай, когда оценки C_i и C_k выше оценки O_v . Согласно (1) в этом случае

$$(П.1) \quad \bar{C}_{iv}^j = \bar{C}_{kv}^j = O_v^j.$$

Случаи, соответствующие рис. 6, б и в, отражают доминирование оценки C_i над оценкой C_k . На рис. 6, г оценки объектов совпадают.

В общем случае возможны три следующие ситуации:

- оценки $\bar{C}_{iv}^j$ и $\bar{C}_{kv}^j$ совпадают,
- $\bar{C}_{iv}^j$ доминирует над $\bar{C}_{kv}^j$,
- $\bar{C}_{kv}^j$ доминирует над $\bar{C}_{iv}^j$.

Обозначим через B число всех возможных случаев, соответствующих ситуации а), через D — ситуации б), а через D — ситуации в). Из предположения о равновероятности следует, что при $O_v^j = l$:

$$B = (t-l+1)^2 + (l-1),$$

$$D = \frac{1}{2} (l-1)(l-2) + (t-l+1)(l-1),$$

(П.2)

$$F = \frac{1}{2} (l-1)(l-2) + (t-l+1)(l-1).$$

В общем случае, когда l меняется от 1 до t , получим:

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{l=1}^t (t-l+1)^2 + \sum_{l=1}^t (l-1), \\ \text{(П.3)} \quad D(t) &= {}^{1/2} \sum_{l=1}^t (l-1)(l-2) + \sum_{l=1}^t (t-l+1)(l-1), \\ F(t) &= {}^{1/2} \sum_{l=1}^t (l-1)(l-2) + \sum_{l=1}^t (t-l+1)(l-1). \end{aligned}$$

Обозначим через E число всех возможных вариантов

$$\text{(П.4)} \quad E(t) = t^3.$$

Вероятность того, что субъекты $\bar{C}_{iv}$ и $\bar{C}_{kv}$ будут иметь одинаковые оценки по критерию j , равна

$$\text{(П.5)} \quad p_0 = \frac{B(t)}{E(t)} = \frac{\sum_{l=1}^t [(t-l+1)^2 + (l-1)]}{t^3}.$$

Вероятность того, что субъект $\bar{C}_{iv}$ доминирует над $\bar{C}_{kv}$ по критерию j , равна

$$\text{(П.6)} \quad p_1 = \frac{D(t)}{E(t)} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^t (l-1)(l-2) + \sum_{l=1}^t (t-l+1)(l-1)}{t^3}.$$

Аналогично этому вероятность доминирования $\bar{C}_{iv}^j$ над $\bar{C}_{kv}^j$ равна

$$\text{(П.7)} \quad p_2 = \frac{F(t)}{E(t)} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^t (l-1)(l-2) + \sum_{l=1}^t (t-l+1)(l-1)}{t^3}.$$

В табл. 3 приведены значения величин P_0 , P_1 и P_2 при различных t . Очевидно, что

$$\text{(П.8)} \quad P_0 + P_1 + P_2 = 1, \quad P_1 = P_2 = P_+.$$

При нескольких критериях оценки субъектов и объектов в соответствии с бинарным отношением B_i возможны две следующие ситуации:

а) субъекты $\bar{C}_{iv}$ и $\bar{C}_{kv}$ сравнимы (оценки $\bar{C}_{iv}$ по всем критериям больше или равны оценкам $\bar{C}_{kv}$ или наоборот),

б) субъекты $\bar{C}_{iv}$ и $\bar{C}_{kv}$ находятся в отношении несравнимости (по одним критериям $\bar{C}_{iv}$ доминирует над $\bar{C}_{kv}$, по другим — наоборот).

Подсчитаем вероятность того, что $\bar{C}_{kv}$ и $\bar{C}_{iv}$ сравнимы для общего случая, когда имеется n критериев:

$$\text{(П.9)} \quad P(n) = p_0^n + \sum_{i=1}^n C_n^i p_0^{n-i} p_1^i + \sum_{i=1}^n C_n^i p_0^{n-i} p_2^i,$$

где C_n^i — число сочетаний из n по i .

Первый член в (П.9) есть вероятность того, что субъекты равноценны, второй член — вероятность того, что первый субъект доминирует над вторым, а третий член — вероятность того, что второй субъект доминирует над первым.

При сложении первых двух членов и после ряда преобразований получаем

$$(П.10) \quad P(n) = 2(p_0 + p_*)^{n-1} p_0^n.$$

Подсчитаем вероятность того, что по $(n-1)$ -му критерию оценки одного субъекта равны или выше оценок другого, а по 1-му критерию второй субъект доминирует над первым (несравнимость по 1-му критерию):

Таблица 3

	t			
	2	3	4	5
P_0	0,750	0,630	0,563	0,520
P_1	0,125	0,185	0,218	0,240
P_2	0,125	0,185	0,218	0,240

$$(П.11) \quad Q(n) = C_n^1 C_{n-1}^1 p_0^{n-2} p_1 p_2 + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} C_n^i C_{n-1}^1 p_0^{n-i-1} p_1 p_2 + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} C_n^i C_{n-1}^i p_0^{n-i-1} p_1 p_2^i.$$

Преобразуя формулу (П.11), получим

$$(П.12) \quad Q(n) = 2C_n^1 p_* [(p_0 + p_*)^{n-1} - p_0^{n-1} - 1/2 C_{n-1}^1 p_0^{n-2} p_*].$$

Подсчитаем вероятность несравнимости по двум критериям, т.е. вероятность того, что по $(n-2)$ критериям оценки одного субъекта равны или выше оценок

Таблица 4

t	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,968	0,918	0,856	0,788	0,719	0,652	0,586	0,525	0,471
3	0,929	0,830	0,722	0,616	0,520	0,434	0,360	0,300	0,245
4	0,904	0,775	0,645	0,524	0,423	0,336	0,275	0,211	0,165
5	0,884	0,736	0,593	0,468	0,364	0,282	0,217	0,166	0,127

второго, а по двум критериям второй субъект доминирует над первым:

$$(П.13) \quad U(n) = C_n^2 C_{n-2}^2 p_0^{n-4} p_1^2 p_2^2 + \sum_{i=3}^{n-1} C_n^2 C_{n-2}^i p_0^{n-2-i} p_1^i p_2^2 + \\ + \sum_{i=3}^{n-2} C_n^2 C_{n-2}^i p_0^{n-2-i} p_1^2 p_2^i.$$

После ряда преобразований получаем

$$(П.14) \quad U(n) = 2C_n^2 p_*^2 [(p_0 + p_*)^{n-2} - p_0^{n-2} - C_{n-2}^1 p_0^{n-3} p_* - 1/2 C_{n-2}^2 p_0^{n-4} p_*^2].$$

В табл. 4-7 даны соответственно значения для P , Q , U и $R=P+Q+U$ при различных t и n .

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Покажем, что при непротиворечивости линейных квазипорядков в матрице M_1 всегда есть клетка $D_1 \setminus D_1$.

Пусть вершина $\bar{O}_{v1}$ графа $\bar{S}_1$ имеет индекс D_1 . По предположению вершина $\bar{C}_{1v}$ графа T_v не имеет индекса D_1 (иначе на пересечении 1-й строки и v -го столбца

Таблица 5

t	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,031	0,082	0,132	0,206	0,266	0,32	0,364	0,397	0,422
3	0,069	0,166	0,265	0,356	0,415	0,455	0,470	0,466	0,448
4	0,095	0,223	0,338	0,427	0,477	0,484	0,476	0,448	0,411
5	0,116	0,262	0,385	0,463	0,493	0,489	0,461	0,416	0,368

Таблица 6

t	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	0,0014	0,0062	0,0154	0,0290	0,049	0,074	0,100
3	0	0	0,0069	0,0270	0,0590	0,1040	0,161	0,205	0,253
4	0	0	0,0135	0,0520	0,1060	0,1680	0,231	0,292	0,337
5	0	0	0,0199	0,0660	0,1380	0,2110	0,301	0,337	0,370

Таблица 7

t	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	1	1	1	1	1	0,999	0,996	0,992
3	1	1	1	1	1	1	0,991	0,969	0,946
4	1	1	1	1	1	1	0,982	0,951	0,913
5	1	1	1	1	1	1	0,979	0,919	0,865

была бы клетка $D_1 \setminus D_1$). Пусть в графе $\bar{T}_v$ индекс D_1 имеет вершина $\bar{C}_{iv}$. По предположению вершина $\bar{O}_{vi}$ графа $\bar{S}_i$ не имеет индекса D_1 . Пусть в графе $\bar{S}_i$ индекс D_1 имеет вершина $\bar{O}_{ji}$. По предположению вершина $\bar{C}_{ij}$ графа $\bar{T}_j$ не имеет индекса D_1 . Пусть в графе $\bar{T}_j$ индекс D_1 имеет вершина $\bar{C}_{1j}$. Тогда из изложенного выше следует

$$(П.15) \quad \bar{O}_{iv} \Rightarrow \bar{O}_{1j},$$

$$(П.16) \quad \bar{C}_{iv} \Rightarrow \bar{C}_{1v},$$

$$(П.17) \quad \bar{O}_{ji} \Rightarrow \bar{O}_{vi},$$

$$(П.18) \quad \bar{C}_{1j} \Rightarrow \bar{C}_{ij}.$$

Из (П.15) – (П.17) следует, что в линейном квазипорядке, построенном для C_1 , объект O_v находится выше объекта O_j ; в линейном квазипорядке, построенном для O_v , субъект C_i находится выше, чем C_1 ; в квазипорядке, построенном для C_i , объект O_j находится выше, чем O_v . Отсюда можно сделать вывод, что в квазипорядке, построенном для O_j , субъект C_i должен быть выше, чем C_1 . Однако из (П.18) следует противоположное. Легко увидеть, что противоречие исчезает, если допустить существование клетки $D_1 \setminus D_1$ хотя бы на одном из пересечений строк C_1 , C_i и столбцов O_v , O_j .

Полученное выше противоречие означает, что при переходе от матрицы M к матрице M_1 одна часть информации позволила определить, что субъект C_i ближе к объекту O_j , чем субъект C_1 , а другая часть информации определяла прямо противоположное. По условию теоремы линейные квазипорядки непротиворечивы, что позволяет сделать вывод о наличии хотя бы одной клетки $D_1 \setminus D_1$ на пересечениях строк C_1 , C_i и столбцов O_v , O_j .

В общем случае в графе T_j индекс D_1 может иметь иная вершина, чем $\bar{C}_{1j}$. Тогда такое же противоречие возникнет позже, когда вершина графа T_k с индексом D_1 окажется в уже встречавшейся p -й строке или вершина графа S_p окажется в уже встречавшемся k -м столбце. Так как общее число строк и столбцов матрицы M_1 равно $2n$, то указанное противоречие встретится не позднее чем через $2n$ шагов. Очевидно, что противоречие устраняется при наличии хотя бы одной клетки $D_1 \setminus D_1$ на пересечениях встречавшихся строк и столбцов, что и требовалось доказать.

Поступила в редакцию
9 марта 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ларичев О. И. Системный анализ: проблемы и перспективы. Автоматика и телемеханика, № 2, стр. 61–71, 1975.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. I–III. «Мир», 1972.
3. Акофф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. «Мир», 1971.
4. Малишевский А. В. Равновесные решения и их реализация в задаче о распределении дискретных объектов. Рефераты докладов VI Всес. совещ. по проблемам управления, стр. 61–64. «Наука», 1974.
5. Gärdenfors P. Assignment problem based on ordinal preferences. Manag. Sci., vol. 20, No. 3, p. 331–340, Nov. 1973.
6. Gale D., Shapley L. S. College admissions and the stability of marriage. Amer. Math. Monthly, vol. 69, No. 1, p. 9–15, 1962.
7. Gärdenfors P. Match making: assignments based on bilateral preferences. Behavioral Sci., vol. 20, No. 3, p. 166–173, 1975.
8. Ларичев О. И., Зуев Ю. А., Гнеденко Л. С. Метод построения классификации проектов проведения прикладных научных исследований и разработок. В сб. «Планирование научных исследований и разработок», стр. 28–57. «Наука», 1974.
9. Филиппов В. А., Ларичев О. И., Бойченко В. С. Методы перспективного планирования научных исследований и разработок. В сб. «Социологические проблемы науки», стр. 387–412. «Наука», 1974.
10. Березовский В. А., Трахтенгерц Э. А. Вероятностная оценка длины очереди наиболее предпочтительных требований в операционных системах. Автоматика и телемеханика, № 1, стр. 187–195, 1975.

A MULTI-CRITERIAL ASSIGNMENT PROBLEM

A. N. KOZHUKHAROV, O. I. LARICHEV

The problem of allocation n objects among n subjects is discussed; both the objects and the subjects are estimated in terms of N qualitative criteria with ordinal scales. There is a leader responsible for solving the problem. The solution criterion is selection of object—subject pairs whose vector characteristics are the closest. An interactive solution algorithm is proposed where the preferences of the leader are used.