

СУБОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ СО СВЯЗЬЮ ПО ОГРАНИЧЕНИЮ

О. И. ЛАРИЧЕВ

(Москва)

Предложен способ субоптимального по быстродействию управления применительно к задаче о движении управляемой точки. Найдена оценка качества субоптимального управления.

Постановка задачи

В плоскости движется управляемая точка единичной массы, причем сила тяги «двигателя» точки ограничена по модулю и может быть направлена в любую сторону. Требуется за минимальное время перевести точку в начало координат плоскости с нулевой конечной скоростью.

Запишем уравнения движения точки:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= u_1, & \dot{x}_4 &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_1, x_3 — координаты точки, x_2, x_4 — проекции скорости движения точки на соответствующие оси, u_1 и u_2 связаны соотношением

$$u_1^2 + u_2^2 \leq 1. \quad (2)$$

Различные варианты данной задачи рассматривались во многих работах (например, [1—3]) как задачи об оптимальном управлении движением спутника. Для решения задачи использовались принцип максимума и динамическое программирование. Полученные в результате решения алгоритмы нахождения оптимального управления связаны со значительными трудностями в вычислениях (см., например, [3]).

В настоящей работе предлагается другой подход к решению поставленной задачи: нахождение простого алгоритма, близкого к оптимальному (субоптимального) управления. Такой подход сам по себе не является новым. Методы субоптимального управления предлагались ранее для многих задач оптимизации. Однако в опубликованных ранее работах, относящихся к данному направлению, нигде не ставилась задача оценки качества предлагаемых субоптимальных методов, т. е. задача сравнения (по критерию качества) процессов в системе при субоптимальном и оптимальном управлении. Основная трудность состоит в том, что для нахождения такой оценки необходимо знать оптимальное управление, а в большинстве случаев субоптимальное управление предлагалось для тех задач, где построение оптимального управления очень сложно.

В данной работе предлагается метод нахождения оценки качества субоптимального управления. При этом методе в рассматриваемую систему вносятся изменения (по возможности небольшие), при которых значительно упрощается задача нахождения оптимального управления, причем про-

цессы в измененной системе превосходят (по выбранному критерию) оптимальные процессы в исходной системе (при тех же начальных условиях). Например, можно заменить истинную область управления охватывающей ее областью более простого вида. Далее приводится сравнение (по критерию) процессов в исходной системе при субоптимальном управлении с процессами в измененной системе при оптимальном управлении.

Отметим, что, кроме нахождения оценки качества какого-либо способа субоптимального управления, данный метод позволяет провести сравнение различных способов субоптимального управления. Предлагаемый метод используется в данной работе для оценки качества субоптимального по быстрдействию управления системой (4).

Субоптимальное управление

Систему (4) можно рассматривать как совокупность двух одинаковых подсистем с управлениями u_1, u_2 . Эти подсистемы связаны ограничением (2), наложенным на управления. Известно [2], что при оптимальном по быстрдействию управлении неравенство (2) переходит в равенство. Поэтому в общем случае процессы в подсистемах при оптимальном управле-

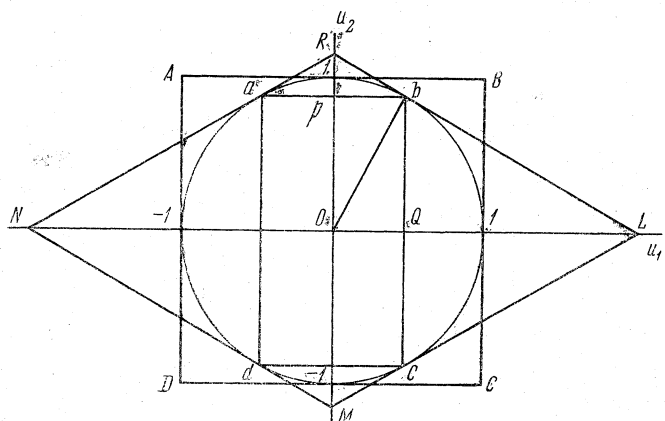


Рис. 1

нии оканчиваются одновременно. Если бы область управлений (2) представляла собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям, то система (1) распалась бы на две независимые подсистемы.

Эти факты позволяют предложить следующий алгоритм субоптимального управления.

При заданных начальных условиях истинная область управления (круг) заменяется вписанным в нее прямоугольником со сторонами, параллельными осям u_1 и u_2 ($abcd$ на рис. 1). Соотношение сторон прямоугольника выбирается так, чтобы процессы в подсистемах оканчивались одновременно.

Таким образом, модули управлений подсистем определяются из уравнений

$$\theta_1(x_1^0, x_2^0, u_1) = \theta_2(x_3^0, x_4^0, u_2), \quad (3)$$

где θ_1, θ_2 — времена окончания процессов в подсистемах,

$$u_2 = \sqrt{1 - u_1^2}. \quad (4)$$

Определим зависимость θ_1 и θ_2 от начальных условий и управлений. Нетрудно найти, что для системы

$$\dot{y}_1 = y_2; \quad \dot{y}_2 = u, \quad |u| \leq k \quad (5)$$

оптимальное уравнение содержит два интервала знакопостоянства управ-

ления (τ_1, τ_2) , равные:

$$\tau_1 = \frac{y_2^0}{k} \operatorname{sign} u + \sqrt{\frac{(y_2^0)^2}{2k^2} - \frac{y_1^0}{k} \operatorname{sign} u}, \quad (6)$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{(y_2^0)^2}{2k^2} - \frac{y_1^0}{k} \operatorname{sign} u}, \quad (7)$$

где $\operatorname{sign} u$ — знак управления на 1-м интервале.

Следовательно, время достижения начала координат при оптимальном по быстродействию управлении равно

$$T = -\frac{y_2^0}{k} \operatorname{sign} u + 2\sqrt{\frac{(y_2^0)^2}{2k^2} - \frac{y_1^0}{k} \operatorname{sign} u}. \quad (8)$$

Таким образом, уравнение (3) имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{x_2^0}{\sqrt{1-u_2^2}} \operatorname{sign} u_1 + 2\sqrt{\frac{(x_2^0)^2}{2(1-u_2^2)} - \frac{x_1^0 \operatorname{sign} u_1}{\sqrt{1-u_2^2}}} = \\ = -\frac{x_4^0}{|u_2|} \operatorname{sign} u_2 + 2\sqrt{\frac{(x_4^0)^2}{2u_2^2} - \frac{x_3^0 \operatorname{sign} u_2}{|u_2|}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подбирая знаки управлений, находим решение, при котором интервалы (6), (7) знакопостоянства обоих управлений не отрицательны. Следовательно, решая (9), определяем модули управлений для обеих подсистем, а также интервалы знакопостоянства управлений. Поставленная задача свелась к решению нелинейного уравнения (9) с одним неизвестным u_2 .

При сравнении предложенного способа субоптимального управления со способами нахождения оптимального управления можно установить, что предложенный способ значительно проще. Действительно, при точном решении поставленной задачи с помощью принципа максимума [3] приходим к необходимости решать систему из четырех трансцендентных уравнений сложного вида [3] с четырьмя неизвестными. Применяя метод динамического программирования [1], получим сложную программу вычислений для вычислительной машины.

Предложенный способ субоптимального управления можно реализовать при помощи простого вычислительного устройства. Можно также использовать тот факт, что для системы (5) в [4] решена задача синтеза оптимального по быстродействию управления. Используя схему, предложенную в [4] и работающую в ускоренном масштабе времени, можно, задавая u_1 и u_2 в соответствии с (4), найти управления, при которых выполняется равенство (3).

Однако основной характеристикой субоптимального управления является его качество, т. е. величина отношения времени перехода системы в начало координат при оптимальном управлении к времени перехода при субоптимальном управлении:

$$\xi = \frac{T_{\text{опт}}}{T_{\text{суб}}}. \quad (10)$$

Легко увидеть, что величина ξ зависит от конкретных начальных условий в системе (1). Поэтому можно говорить о двух возможных величинах ξ :

1) $\xi_{\text{ср}}$ — величина, которая находится при предположении, что все начальные условия в системе (1) равновероятны;

$$2) \quad \xi_{\text{мин}} = \min_{x_i^0} \frac{T_{\text{опт}}}{T_{\text{суб}}}. \quad (11)$$

Назовем величину ξ оценкой качества субоптимального управления. Представляется вероятным, что в случае, когда нет дополнительных сведений о возможных начальных условиях, величина $\xi_{\text{ср}}$ является лучшей характеристикой способа субоптимального управления.

Оценка качества субоптимального управления

1°. Основная трудность при нахождении оценок субоптимальных методов заключается в том, что, как правило, величину $T_{\text{опт}}$ найти очень трудно, а без $T_{\text{опт}}$ нельзя найти ξ .

Внесем изменения в исходную систему, упрощающие задачу нахождения оптимального управления и такие, при которых процессы в измененной системе протекают за то же (или меньшее) время, что и в исходной системе. Обозначая через $T'_{\text{опт}}$ время протекания процессов в измененной системе, можем записать:

$$\gamma_{\text{ср}} \leq \xi_{\text{ср}}; \quad \gamma_{\text{мин}} \leq \xi_{\text{мин}}, \quad (12)$$

где

$$\gamma = \frac{T'_{\text{опт}}}{T_{\text{суб}}}. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае можно предложить следующий способ нахождения оценки γ . Пусть для каких-либо начальных условий при помощи предложенного выше способа субоптимального управления найдены u_1 и u_2 — управления подсистем (т. е. найден прямоугольник $abcd$, см. рис. 1).

Действительную область управления (2) (круг, рис. 1) впишем в квадрат $ABCD$ и ромб $RLMN$, стороны которого касаются окружности в вершинах вписанного в нее прямоугольника $abcd$. Далее для системы (1) при заданных начальных условиях находится время оптимального по быстродействию управления в двух случаях: 1) когда областью управления является квадрат $ABCD$ (время T_2) и 2) когда областью управления является указанный выше ромб $RLMN$ (время T_1). Очевидно, что

$$T_{\text{опт}} \geq T_i \quad (i = 1, 2). \quad (14)$$

Поэтому в качестве $T'_{\text{опт}}$ можно взять любое из T_1 и T_2 . Следовательно, при заданных начальных условиях можно определять оценку качества предложенного выше способа субоптимального управления по формуле

$$\gamma = \frac{\max(T_1, T_2)}{T_{\text{суб}}}. \quad (15)$$

Естественно, что оценка γ является заниженной, но она позволяет вынести суждение о качестве субоптимального управления.

Можно, конечно, использовать только одну из областей $ABCD$ и $RLMN$ и брать соответственно одну из величин T_1 , T_2 . Однако интуитивно ясно, что формула (15) позволяет найти более точную оценку способа субоптимального управления.

2°. Рассмотрим теперь подробно вопрос о нахождении T_1 и T_2 .

А. При области управлений $ABCD$ (рис. 1) система (1) распадается на две независимые подсистемы. Время оптимального перехода подсистем в начало координат определяется из (8) при $k = 1$.

Как указано выше, при предложенном способе субоптимального управления управление имеет два интервала знакопостоянства.

Рассмотрим 1-ю подсистему:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad |u_1| \leq u' \leq 1. \quad (16)$$

Обозначим 2-й интервал знакопостоянства субоптимального управления через t_1 ; тогда первый интервал равен: $T_{\text{суб}} - t_1$. Пользуясь принци-

пом попятного движения [4], выразим начальные условия подсистемы через $T_{\text{суб}}, t_1$ в следующем виде (для определенности предполагаем, что на первом интервале попятного движения $u_1 > 0$):

$$\begin{aligned}x_2^0 &= (T_{\text{суб}} - 2t_1)u', \\x_1^0 &= (2t_1T_{\text{суб}} - 0,5T_{\text{суб}}^2 - t_1^2)u'.\end{aligned}\quad (17)$$

Будем искать величину T_2 в виде

$$T_2 = \gamma T_{\text{суб}}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (8), получим время оптимального быстрогодействия для 1-й подсистемы при области управления $ABCD$:

$$\begin{aligned}(T_2)_1 &= u'(2t_1 - T_{\text{суб}})\text{sign } u_1 + \\&+ 2\sqrt{0,5(T_{\text{суб}} - 2t_1)^2(u')^2 - (2t_1T_{\text{суб}} - 0,5T_{\text{суб}}^2 - t_1^2)u' \text{sign } u_1}.\end{aligned}\quad (19)$$

Подставляя в (19) $t_1 = \beta_1 T_{\text{суб}}$ ($0 \leq \beta_1 \leq 1$), получим искомое выражение (18) и величину оценки γ , соответствующую начальным условиям (17), т. е. выбранному β_1 .

Изменяя величину β_1 , можем построить кривую $(T_2)_1 = f_1(\beta_1)$, справедливую для определенного соотношения сторон прямоугольника $abcd$, т. е. для заданной величины u' .

Запишем уравнения для 2-й подсистемы:

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_2, \quad |u_2| \leq u'' \leq 1. \quad (20)$$

Аналогично (17) можем записать

$$\begin{aligned}x_4^0 &= (T_{\text{суб}} - 2t_2)u'', \\x_3^0 &= (2t_2T_{\text{суб}} - 0,5T_{\text{суб}}^2 - t_2^2)u'',\end{aligned}\quad (21)$$

где t_2 — второй интервал знакопостоянства субоптимального управления.

Подставляя (21) в (8), получим время оптимального быстрогодействия для 2-й подсистемы при области управления $ABCD$:

$$\begin{aligned}(T_2)_2 &= u''(2t_2 - T_{\text{суб}})\text{sign } u_2 + \\&+ 2\sqrt{0,5(T_{\text{суб}} - 2t_2)^2(u'')^2 - (2t_2T_{\text{суб}} - 0,5T_{\text{суб}}^2 - t_2^2)u'' \text{sign } u_2}.\end{aligned}\quad (22)$$

Подставляя в (22) $t_2 = \beta_2 T_{\text{суб}}$ ($0 \leq \beta_2 \leq 1$), получим искомое выражение (18) для 2-й подсистемы, соответствующее определенным начальным условиям (21). Изменяя β_2 , строим кривую $(T_2)_2 = f_2(\beta_2)$, справедливую для заданной величины u'' .

Итак, для любого заданного прямоугольника $abcd$ можем построить зависимости

$$(T_2)_1 = f_1(\beta_1), \quad (23)$$

$$(T_2)_2 = f_2(\beta_2). \quad (24)$$

Б. При области управления в виде ромба $RLMN$, стороны которого проходят через вершины прямоугольника $abcd$, можно достаточно просто определить оптимальное управление при помощи метода эквивалентной системы [5]. Основные идеи этого метода изложены в Приложении. Метод можно применить для нахождения оптимального по быстродействию управления системой (1) при следующей области управления:

$$\sum_{i=1}^2 |u_i| \leq C = \text{const}. \quad (25)$$

При этом, согласно методу эквивалентной системы, вводится эквивалентная система, уравнения которой совпадают с уравнениями подсистем (17), (20):

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = u_{\text{экр}}. \quad (26)$$

Управление эквивалентной системы представляет собой сумму управлений подсистем. Следовательно, согласно (25)

$$\left| \sum_{i=1}^2 u_i \right| = |u_{\text{экр}}| \leq C. \quad (27)$$

Суммируя и вычитая начальные условия подсистем, получим:

$$(z_1^0)' = x_1^0 + x_3^0, \quad (z_2^0)' = x_2^0 + x_4^0, \quad (28)$$

$$(z_1^0)'' = x_1^0 - x_3^0, \quad (z_2^0)'' = x_2^0 - x_4^0. \quad (29)$$

Те из начальных условий (28) и (29), для которых система (26) при оптимальном по быстродействию управлении осуществит переход в начало координат за большее время, являются начальными условиями эквивалентной системы. Согласно [5], полученное для этих начальных условий время оптимального перевода является временем оптимального быстродействия для системы (1) с областью управления (25).

В рассматриваемом случае область управления $RLMN$ не удовлетворяет соотношению (25) (кроме случая, когда $abcd$ — квадрат). Для перехода от области $RLMN$ к области типа (25) воспользуемся линейностью системы (1). Действительно, если управление линейной системы и ее начальные условия умножить на один и тот же коэффициент, то время перехода системы в начало координат не изменится. Исходя из этого, изменяем масштаб управлений по оси u_1 так, чтобы новая область управлений удовлетворяла (25). При этом умножаем на соответствующий коэффициент начальные условия 1-й подсистемы. Определим этот коэффициент. На рис. 1 радиус окружности, проходящий через точку касания окружности и ромба, перпендикулярен к RL ($OQ = u'$, $OP = u''$ — модули максимальных управлений подсистем при субоптимальном управлении). Обозначим

$$\sigma = \frac{OR}{OL} = \frac{OQ}{OP} = \frac{u'}{u''}. \quad (30)$$

Умножая на коэффициент σ управление u_1 и начальные условия первой подсистемы, переходим к области управления типа (25), для которой:

$$C = OR = \sigma OL. \quad (31)$$

Так как величина OR меняется с изменением прямоугольника $abcd$, то удобно перейти путем преобразования масштабов к области управлений типа (25), для которой

$$C = 1,414 \quad (32)$$

(что соответствует случаю, когда $abcd$ — квадрат). При последнем преобразовании начальные условия и управления обеих подсистем умножаются на коэффициент

$$\delta = \frac{1,414}{OR}. \quad (33)$$

Из подобия треугольника на рис. 1 нетрудно установить, что

$$OR = OP + \sigma OQ = u'' + u'\sigma.$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{1,414}{u'\sigma + u''} = \frac{1,414u''}{(u')^2 + (u'')^2} = 1,414u''. \quad (34)$$

Итак, после указанных выше преобразований рассматриваем систему (1) с начальными условиями:

$$\begin{aligned}(x_1^0)' &= \sigma \delta x_1^0 = 1,414u'x_1^0, \\(x_2^0)' &= \sigma \delta x_2^0 = 1,414u'x_2^0, \\(x_3^0)' &= \delta x_3^0 = 1,414u''x_3^0, \\(x_4^0)' &= \delta x_4^0 = 1,414u''x_4^0\end{aligned}\tag{35}$$

при области управления

$$\sum_{i=1}^2 |u_i| \leq 1,414.\tag{36}$$

Используя (17), (21) и (35), выражаем начальные условия системы (1) через $T_{\text{суб}}, t_1, t_2$:

$$\begin{aligned}(x_1^0)' &= 1,414(u')^2(2t_1T_{\text{суб}} - 0,5T_{\text{суб}}^2 - t_1^2), \\(x_2^0)' &= 1,414(u')^2(T_{\text{суб}} - 2t_1), \\(x_3^0)' &= 1,414(u'')^2(2t_2T_{\text{суб}} - 0,5T_{\text{суб}}^2 - t_2^2), \\(x_4^0)' &= 1,414(u'')^2(T_{\text{суб}} - 2t_2).\end{aligned}\tag{37}$$

Подставляя (37) в (28) и (29), определяем два возможных варианта начальных условий эквивалентной системы:

$$(z_1^0)' = 1,414[2T_{\text{суб}}(u')^2t_1 + 2T_{\text{суб}}(u'')^2t_2 - (u')^2t_1^2 - (u'')^2t_2^2 - 0,5T_{\text{суб}}^2],\tag{38}$$

$$(z_2^0)' = 1,414[T_{\text{суб}} - 2t_1(u')^2 - 2t_2(u'')^2],$$

$$(z_1^0)'' = 1,414[2T_{\text{суб}}(u')^2t_1 - 2T_{\text{суб}}(u'')^2t_2 - 0,5T_{\text{суб}}[(u')^2 - (u'')^2] - t_1^2(u')^2 + t_2^2(u'')^2],$$

$$(z_2^0)'' = 1,414[T_{\text{суб}}[(u')^2 - (u'')^2] - 2(u')^2t_1 + 2(u'')^2t_2].\tag{39}$$

Подставляя (38) и (39) в (8) и учитывая, что согласно (27) и (32) $k = 1,414$, находим соответственно величины T' и T'' :

$$T' = [2t_1(u')^2 + 2t_2(u'')^2 - T_{\text{суб}}] \text{sign } u'_{\text{эвб}} + \sqrt{\lambda_1},$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2[T_{\text{суб}}^2 + 4t_1^2(u')^4 + 4t_2^2(u'')^4 - 4T_{\text{суб}}t_1(u')^2 - 4T_{\text{суб}}t_2(u'')^2 + \\&+ 8t_1t_2(u')^2(u'')^2] - 4 \text{sign } u'_{\text{эвб}} [2T_{\text{суб}}(u')^2t_1 + \\&+ 2T_{\text{суб}}(u'')^2t_2 - 0,5T_{\text{суб}}^2 - (u')^2t_1^2 - (u'')^2t_2^2],\end{aligned}\tag{40}$$

$$T'' = \{2[t_1(u')^2 - t_2(u'')^2] - T_{\text{суб}}[(u')^2 - (u'')^2]\} \text{sign } u''_{\text{эвб}} + \sqrt{\lambda_2},$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 2\{T_{\text{суб}}^2[(u')^2 - (u'')^2]^2 + 4(u')^4t_1^2 + 4(u'')^4t_2^2 - \\&- 4T_{\text{суб}}(u')^2t_1[(u')^2 - (u'')^2] + 4T_{\text{суб}}(u'')^2t_2[(u')^2 - (u'')^2] - \\&- 8(u')^2(u'')^2t_1t_2\} - 4 \text{sign } u''_{\text{эвб}} \{2T_{\text{суб}}(u')^2t_1 - 2T_{\text{суб}}(u'')^2t_2 - \\&- 0,5T_{\text{суб}}^2[(u')^2 - (u'')^2] - t_1^2(u')^2 + t_2^2(u'')^2\},\end{aligned}\tag{41}$$

где $\text{sign } u'_{\text{эвб}} = \pm 1$, $\text{sign } u''_{\text{эвб}} = \pm 1$ — знаки управления эквивалентной системы на 1-м интервале; они подбираются из тех же соображений, что

и sign u в (8). Хотя при записи начальных условий подсистем (17), (21) предполагалось, что первый интервал знакопостоянства субоптимального управления положителен, это обстоятельство в данном случае не снижает общности рассмотрения. Во-первых, при получении начальных условий эквивалентной системы начальные условия 2-й подсистемы берутся с различными знаками в (28) и (29), что равносильно учету всех возможных управлений для 2-й подсистемы. Во-вторых, следует учесть, что при смене знака начальных условий изменяется знак управления, а время перевода системы в требуемое положение остается тем же. Следовательно, (28), (29) исчерпывают все возможные начальные условия эквивалентной системы.

Согласно методу эквивалентной системы, время оптимального быстрого действия для системы (1) с начальными условиями (37) и областью управления (36) определяется из соотношения

$$T_1 = \max (T', T''). \quad (42)$$

Выражения (40), (41) представляют собой зависимости

$$T' = f_3(t_1, t_2), \quad T'' = f_4(t_1, t_2). \quad (43)$$

Подставляя в (43) $t_1 = \beta_1 T_{\text{суб}}$, $t_2 = \beta_2 T_{\text{суб}}$, определяем величины T' и T'' , соответствующие определенным начальным условиям (17) и (21).

3°. Рассмотрим вопрос о нахождении оценок $\gamma_{\text{ср}}$ и $\gamma_{\text{мин}}$ при заданном прямоугольнике $abcd$.

Очевидно, что при одних и тех же величинах u' и u'' в (16), (20), (т. е. при одном прямоугольнике $abcd$) возможны различные начальные условия в подсистемах. Для каких-то заданных начальных условий (т. е. для заданных величин β_1 и β_2) можно найти оценку γ из (15), используя формулы (23), (24) и (42). При этом в качестве T_2 используется наибольшая из величин (23) и (24).

Изменяя β_1 , β_2 в диапазоне (0, 1) и определяя оценку γ для каждой пары значений β_1 , β_2 , можем построить поверхность

$$\gamma = \gamma(\beta_1, \beta_2). \quad (44)$$

Эта поверхность полностью характеризует изменение величины оценки γ при всех возможных начальных условиях в подсистемах. Следовательно, оценка $\gamma_{\text{мин}}$ определяется из соотношения

$$\gamma_{\text{мин}} = \min_{\beta_1, \beta_2} \gamma(\beta_1, \beta_2). \quad (45)$$

Оценка $\gamma_{\text{ср}}$ определяется из соотношения:

$$\gamma_{\text{ср}} = \int_0^1 \int_0^1 \gamma(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2. \quad (46)$$

Оценки (45) и (46) можно приближенно определить следующим способом. Выберем β_1 равным одному из следующих значений:

$$0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0. \quad (47)$$

При каждом из выбранных значений β_1 определим β_2 , при котором $\gamma_i = (\gamma_i)_{\text{мин}}$. Оценка (45) определяется при этом из соотношения:

$$\gamma_{\text{мин}} = \min [(\gamma_i)_{\text{мин}}] \quad (i = 0, 1, \dots, 10). \quad (48)$$

Для приближенного определения $\gamma_{\text{ср}}$ вычисляем γ при всех возможных комбинациях значений β_1 и β_2 из множества (47).

Для каждого из β_1 $\gamma_{\text{ср}}$ определяется по формуле:

$$\gamma_{\text{ср}}(\beta_1) = \frac{1}{11} \sum_{j=0}^{10} \gamma_i(\beta_1), \quad (49)$$

где $\gamma_i(\beta_1)$ определяются при всех значениях β_2 из множества (47). Находя оценки (49) при всех значениях β_1 в (47), окончательно запишем

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{1}{11} \sum_{j=0}^{10} [\gamma_{\text{ср}}(\beta_1)]_j. \quad (50)$$

Оценки (48) и (50) являются искомыми оценками качества субоптимального управления, найденными для заданного прямоугольника $abcd$.

4°. Перейдем к нахождению оценок $\gamma_{\text{ср}}$ и $\gamma_{\text{мин}}$ для предложенного способа субоптимального управления в целом. Для приближенного определения этих оценок впишем в действительную область управления (круг,

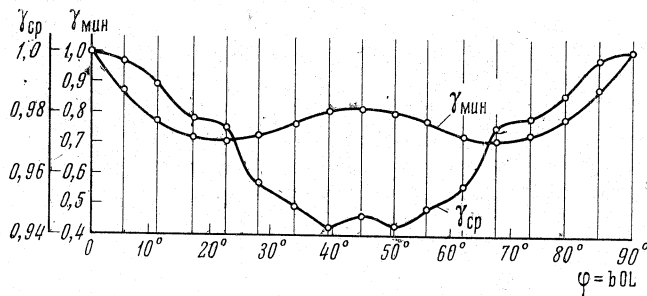


Рис. 2

рис. 1) множество прямоугольников вида $abcd$ так, что при переходе от одного прямоугольника к другому угол bOL изменяется на одну и ту же величину $\Delta\varphi$.

Можно принять, что совокупность начальных условий, определяемых для каждого из прямоугольников по формулам (17), (21), представляет собой все возможные начальные условия в системе (1).

Так как оценки для каждого прямоугольника уже найдены ((48), (50)), то общие оценки предложенного метода определяются по формулам

$$\gamma_{\text{мин}} = \min(\gamma_{\text{мин}})_v$$

$$(v = 1, 2, \dots, m), \quad (51)$$

где m — число прямоугольников,

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\gamma_{\text{ср}})_v. \quad (52)$$

При проведении вычислений на ЭВМ было взято $m = 15$ ($\Delta\varphi \cong 5^\circ 40'$).

При этом были получены следующие значения оценок:

$$\gamma_{\text{мин}} = 0,7; \quad \gamma_{\text{ср}} = 0,942. \quad (53)$$

На рис. 2 даны изменения оценок $\gamma_{\text{мин}}$ и $\gamma_{\text{ср}}$ в функции от угла bOL прямоугольника $abcd$ (по приведенным выше формулам уточнялись значения $\gamma_{\text{мин}}$ при непрерывном изменении φ).

В качестве примера, иллюстрирующего важность учета двух областей ($ABCD$ и $RLMN$) при нахождении оценки, на рис. 3 приведены оценки γ_1 и γ_2 , найденные при использовании каждой из этих областей отдельно ($\varphi = 45^\circ$, $\beta_1 = 0,2$). Из рис. 3 видно, что $\max(\gamma_1, \gamma_2)$ превышает каждую из оценок, взятую отдельно.

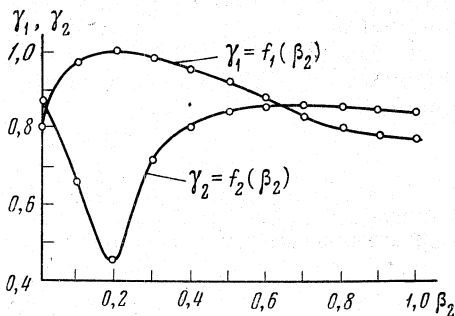


Рис. 3

Выводы

1. Для нахождения оценок субоптимальных методов в ряде случаев можно использовать следующий прием. В рассматриваемую систему вносятся изменения, удовлетворяющие следующим условиям:

а) процессы в измененной системе по заданному критерию превосходят процессы в исходной системе (при тех же начальных условиях);

б) нахождение оптимального управления для измененной системы значительно проще, чем для исходной;

в) желательно, чтобы изменения в исходной системе были по возможности небольшими.

Далее производится сравнение (по заданному критерию) процессов в измененной системе и в исходной системе при субоптимальном управлении.

2. Использование нескольких измененных систем позволяет получить более точную оценку (см. рис. 3).

3. Предложенный метод использовался в данной работе для оценки качества субоптимального управления системой (4). Можно использовать тот же способ субоптимального управления (найти его оценку) для иных вариантов постановки задачи, в частности для системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= u_1 + g_1, & \dot{x}_4 &= u_2 + g_2, \\ \sum_{i=1}^2 u_i^2 &\leq 1, \end{aligned} \quad (54)$$

где $g_1, g_2 = \text{const } |g_i| < 1$.

Оценки для системы (54) находятся аналогично, так как для этой системы с областью управления (25) применим модифицированный метод эквивалентной системы (изложение этого метода выходит за пределы данной статьи).

4. Задание области наиболее вероятных начальных условий позволяет найти более точные оценки качества способов субоптимального управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Предложенный в работе [5] метод эквивалентной системы позволяет просто найти оптимальное по быстродействию управление для системы, состоящей из N линейных одинаковых подсистем, управления которых связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^N |u_i| \leq C. \quad (\text{П.1})$$

Основная идея этого метода заключается в следующем. Вводится эквивалентная система, такая же, как и каждая из подсистем. Начальные условия эквивалентной системы получают из начальных условий подсистем по определенному правилу (см. далее). Управление эквивалентной системы рассматривается как сумма управлений подсистем; следовательно, согласно (П.1) оно удовлетворяет условию

$$\left| \sum_{i=1}^N u_i \right| = |u_{\text{э.н.в.}}| \leq C. \quad (\text{П.2})$$

Для эквивалентной системы с заданными начальными условиями и управлением, ограниченным условием (П.2), можно сравнительно просто найти оптимальное по быстродействию управление, так как размерность эквивалентной системы в N раз меньше размерности исходной системы. После нахождения оптимального управления эквивалентной системы это управление определенным образом распределяется на подсистемы. В работе [5] доказано, что такое распределение всегда возможно и что данный метод всегда приводит к нахождению оптимального по быстродействию управления исходной системы.

Существенно то, что метод эквивалентной системы является декомпозиционным, т. е. на всех этапах его применения рассматривается либо эквивалентная система, либо одна подсистема, но не система в целом.

В заключение приведем правило определения начальных условий подсистем по начальным условиям эквивалентной системы.

Образуем сумму:

$$\bar{x}_{\text{экв}}^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{x}_i^0, \quad (\text{П.3})$$

где $\bar{x}_i^0$ — начальные условия i -й подсистемы, $\alpha_i = \pm 1$.

Очевидно, что при различных α_i в (П.3) получим различные $\bar{x}_{\text{экв}}^0$ и различное время протекания оптимального по быстродействию процесса в эквивалентной системе. Необходимо выбрать α_i в (П.3) так, чтобы оптимальный по быстродействию процесс в эквивалентной системе был наиболее длительным. Время протекания этого процесса является временем оптимального быстродействия для исходной системы, состоящей из N подсистем с начальными условиями $\bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_N^0$.

Поступила в редакцию
1 февраля 1967 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», 1965.
2. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
3. Sagirow P., Frik M. Ein Optimisierungsproblem der Mechanik mit Stetigen und Unstetigen Steuerungen. ZAMM, Band 43, Heft 4/5, 1964.
4. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
5. Ларичев О. И. Метод эквивалентной системы. Тр. III Всес. совещ. по автомат. управл. Изд-во «Наука», 1967.

SUBOPTIMAL BY ITS QUICK-RESPONSE CONTROL OF SYSTEM CONNECTED BY LIMITATION

O. I. LARITCHEV

A method of a suboptimal by its quick-response control conformably to the problem of the controlled point movement is suggested. The estimation of the suboptimal control quality is determined.