Том XXVI *«АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА»* *№ 1*

1965

УДК 62-505

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

О. И. ЛАРИЧЕВ

(*Москва*)

Рассматривается вопрос о единственности оптимального по быстродействию управления в системах, не удовлетворяющих условию общности положения. Получено необходимое условие существования нескольких оптимальных управлений.

Рассмотрим систему автоматического управления, описывающуюся уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где A — матрица $n \times n$ постоянных коэффициентов, B — матрица $n \times r$ постоянных коэффициентов, x — n-мерный вектор, характеризующий состояние системы, u — r-мерный вектор управления.

На вектор u наложим следующее ограничение:

$$u \in u^*, \tag{2}$$

где u^* — замкнутая, выпуклая* область r-мерного пространства управлений, охватывающая начало координат.

Запишем условие общности положения, предполагая, что u^* — многогранник, векторы

$$Bw, ABw, \ldots, A^{(n-1)}Bw \tag{3}$$

должны быть линейно независимыми (w — вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника u^*).

В [1] доказана теорема единственности оптимального по быстродействию управления для систем, удовлетворяющих условию (3) общности положения, для случая, когда u^* — выпуклый замкнутый многогранник.

Однако имеется класс систем, не удовлетворяющих условию (3), но, тем не менее, управляемых [2]. Согласно [5], к этому классу не относятся системы с одной выходной величиной и одним управлением.

В [3] получено условие управляемости для систем, не удовлетворяющих (3):

среди векторов:

$$b_1, \ldots, b_r, Ab_1, \ldots, Ab_r, \ldots, A^{(n-1)}b_1, \ldots, A^{(n-1)}b_r \tag{4}$$

должно быть n линейно независимых ($b_1, \ldots, b_r$ — столбцы матрицы B).

Поставим следующую задачу.

Пусть на вектор u наложено ограничение (2), и система (1), для которой не выполняется условие (3), управляемая. Требуется определить усло-

* Если расширить класс допустимых оптимальных управлений, включив в них и скользящие режимы, то интуитивно ясно, что невыпуклые области можно заменить выпуклыми. Действительно, если в течение времени τ вектор находится между точками C и D поверхности области u^*, то, непрерывно перемещая его из одной точки в другую, можно получить эффективное управление, соответствующее положению конца вектора u в любой точке прямой CD.

вие неединственности оптимального по быстродействию управления в системе (1).

Запишем выражение для системы, сопряженной к (1),

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \tag{5}$$

где A' — матрица, транспонированная к A.

Выражение для гамильтониана

$$H = \psi Ax + \psi Bu = \psi Ax + \varphi u, \tag{6}$$

где φ — вектор размерности r; составляющие вектора φ представляют собой линейные комбинации компонент вектора ψ.

Нетрудно показать [4], что система (1) неуправляемая при выполнении равенства

$$\psi(t) = 0$$

на любом отрезке времени τ. В связи с этим данный случай исключается из рассмотрения.

При оптимальном управлении H достигает максимума (по u) одновременно с функцией

$$\psi Bu = \varphi u. \tag{7}$$

Так как скалярное произведение φu представляет собой линейную функцию u, то максимум H достигается при нахождении конца вектора u на границе области u^*.

Докажем справедливость следующего положения. Необходимым условием неединственности оптимального управления в системе (1) с ограничением на управление (2) является такой вид области u^*, что ее поверхности может принадлежать отрезок прямой.

Доказательство. Поставим задачу определения максимума H по u в момент $t = T$ при известной функции $\varphi(T)$.

Построим в r-мерном пространстве управлений вектор $\varphi(T)$. Зная вектор $\varphi(T)$, можем построить семейство гиперплоскостей, нормальных к этому вектору. Выберем из этого семейства гиперплоскость Q, опорную к области управлений u^*.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Гиперплоскость Q и область управлений u^* имеют единственную общую точку K.

Очевидно, что вектор управления u, при котором достигается максимум (6), должен оканчиваться в точке K. Иными словами, точка касания определяет единственное оптимальное управление.

2. Гиперплоскость Q и область управлений u^* имеют несколько общих точек.

Согласно условию, область u^* выпуклая. Следовательно, касание гиперплоскости Q и области u^* происходит по отрезку прямой или по части гиперплоскости Q. В данном случае вектор u, при котором достигается максимум H, может оканчиваться в любой общей точке гиперплоскости Q и области управления u^*. Легко увидеть, что при этом возникает возможность неединственности оптимального управления в системе (1).

Пример. Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u_1, \qquad \dot{x}_3 = x_4, \qquad \dot{x}_4 = u_2. \tag{8}$$

На вектор u с координатами u_1, u_2 наложено ограничение (2). Нетрудно убедиться, что для системы (8) несправедливо условие (3) и что, согласно критерию (4), система является управляемой.

Выражение для гамильтониана

$$H = x_2\psi_1 + u_1\psi_2 + x_4\psi_3 + u_2\psi_4. \tag{9}$$

Запишем уравнения для сопряженной системы

$$\dot{\psi}_1 = 0, \qquad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \qquad \dot{\psi}_3 = 0, \qquad \dot{\psi}_4 = -\psi_3. \tag{10}$$

Решая (10), находим

$$\psi_1 = c_1, \qquad \psi_2 = c_2 - c_1 t, \qquad \psi_3 = c_3, \qquad \psi_4 = c_4 - c_3 t. \tag{11}$$

Вектор $\varphi(t)$ имеет составляющие

$$\varphi_1(t) = \psi_2(t), \qquad \varphi_2(t) = \psi_4(t). \tag{12}$$

На плоскости (u_1, u_2), (φ_1, φ_2) конец вектора $\varphi(t)$ с течением времени перемещается по прямой. Если эта прямая не проходит через начало координат, то вектор $\varphi(t)$ вращается. При прохождении прямой через начало координат вектор $\varphi(t)$ сохраняет постоянное направление. Очевидно, что при вращении вектора $\varphi(t)$ невозможно найти область управлений u^*, при которой в любой момент времени выполнялось бы необходимое условие неединственности оптимального управления.

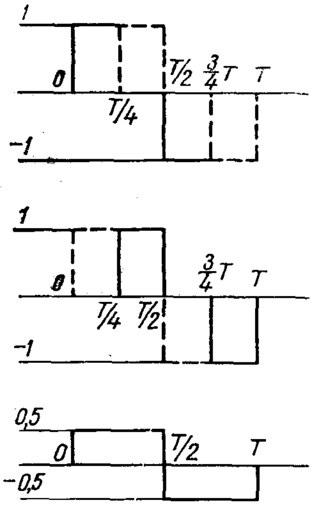

Рис. 1

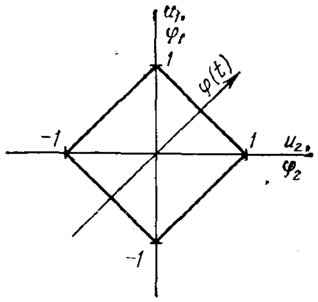

Рис. 2

Следовательно, если в системе (8) имеется несколько оптимальных управлений, то направление вектора $\varphi(t)$ остается неизменным.

Пусть, например, дана следующая область управлений

$$|u_1(t)| + |u_2(t)| \leqslant 1$$

и заданы начальные условия

$$x_1(0) = x_3(0) = -1, \qquad x_2(0) = x_4(0) = 0.$$

Минимально возможное время перевода изображающей точки системы в начало координат пространства (x_1, x_2, x_3, x_4) равно

$$T = 2\sqrt{2}.$$

Это значение может быть получено при трех (по крайней мере) оптимальных управлениях (рис. 1). Вектор $\varphi(t)$ с равными составляющими $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ проходит через начало координат и сохраняет свое направление неизменным (рис. 2).

В заключение автор благодарит Л. И. Розоноэра за советы и замечания.

Поступила в редакцию
9 марта 1964 г.

Цитированная литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
2. Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S. Controllability of Linear Dynamical Systems. Contributions to Differential Equations, vol. 1, No. 2, 1963.
3. La Salle. The Time Optimal Control Problem. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Princeton University, No. 5, 1960.
4. Розоноэр Л. И. Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления. I. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 6, 1963.
5. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, т. 25, № 3, 1961.

ON SINGULARITY OF OPTIMAL QUICK-RESPONSE CONTROL IN A CLASS OF MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS

O. I. LARICHEV

The problem of singularity of optimal quick-response control in systems not satisfying the requirement of position generality is considered. The necessary condition for existence of several optimal controls is obtained.

Ларичев О. И. О единственности оптимального по быстродействию управления в одном классе многосвязных систем // *Автоматика и телемеханика*. —1965. —Т. 26, № 1.—С. 28–30.

```
@Article{Larichev_1965,
  author =       "Ларичев, О. И.",
  title =        "О единственности оптимального по быстродействию управления
                  в одном классе многосвязных систем",
  journal =      "Автоматика и телемеханика",
  volume =       "26",
  number =       "1",
  pages =        "28--30",
  year =         "1965",
  language =     "russian",
}
```