ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР, ОТН
ЭНЕРГЕТИКА И АВТОМАТИКА
№ 5 1961

О ПОЛИИНВАРИАНТНОСТИ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. С. КУЛЕБАКИН, О. И. ЛАРИЧЕВ

(Москва)

В последние годы все большее развитие получают системы автоматического управления с регулированием по нескольким параметрам, находящиеся в общем случае под действием многих возмущений. Одним из эффективных средств повышения качества работы таких систем является применение к ним принципов инвариантности. При рассмотрении вопросов, связанных с анализом и синтезом инвариантных многосвязанных или многопараметрических систем, полагаем, что процессы в таких системах могут быть с достаточной точностью описаны линейными неоднородными дифференциальными уравнениями.

Для однопараметрической системы автоматического регулирования, находящейся под действием одного возмущения, в [1, 2] была исследована абсолютная инвариантность и инвариантность до ε регулируемой координаты системы от действующего на нее возмущения.

Для системы уравнений

$$\| a_{ij} \|_n^1 X = F \tag{1}$$

где $\| a_{ij} \|_n^1$ — матрица операторов дифференцирования с постоянными коэффициентами, X — вектор-столбец из координат x_{ij}, F — вектор-столбец возмущающих воздействий f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, было доказано, что условием инвариантности координаты $X_1(t)$ от возмущающего воздействия $f_1(t)$ является тождественное равенство нулю адъюнкта A_{11} определителя $| a_{ij} |_n^1$. В дальнейшем будем считать, что система (1) приведена к виду, в котором число уравнений равно числу регулируемых координат.

При стремлении получить инвариантность нескольких координат от одного возмущения или одной координаты от нескольких возмущений (т. е. полиинвариантность), требуется обеспечить тождественное равенство нулю адъюнктов нескольких элементов матрицы $\| a_{ij} \|_n^1$, причем необходимо, чтобы при этом не обращался в нуль определитель $| a_{ij} |_n^1$. Итак, для системы линейных дифференциальных уравнений (1), описывающих многопараметрическую автоматическую систему, находящуюся под действием m возмущений $(m = 1, \ldots, n)$, нужно решить следующие задачи:

1) Сколько адъюнктов элементов одной строки или столбца определителя $| a_{ij} |_n^1$ при $a_{ij} \neq 0$ можно тождественно приравнять нулю при $| a_{ij} |_n^1 \neq 0$; иначе: сколько координат $x_i(t)$ можно сделать одновременно инвариантными к одному из возмущений $f_i(t)$.

2) Можно ли тождественно приравнять нулю адъюнкты диагональных элементов определителя $| a_{ij} |_n^1$ при $| a_{ij} |_n^1 \neq 0$, т. е. можно ли одновременно сделать инвариантными все координаты $x_i(t)$ от действующих на них соответственно возмущений $f_i(t)$.

3) Найти наибольшее число адъюнктов произвольно расположенных элементов определителя $| a_{ij} |_n^1$, которые можно приравнять тождественно нулю без обращения в нуль самого определителя $| a_{ij} |_n^1$.

Инвариантность нескольких координат системы дифференциальных уравнений от действия одного возмущения. Докажем следующую теорему: Если $(n - 1)$ адъюнктов элементов одной строки (или столбца) определителя $|a_{ij}|_n^1$ равны нулю, то сам определитель $|a_{ij}|_n^1 = 0$.

Имеем определитель

$$|a_{ij}|_n^1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

При этом полагаем, что адъюнкты для элементов первого столбца

$$A_{11} = A_{21} = A_{31} = \dots = A_{(n-1),1} \equiv 0 \quad \text{при} \quad a_{ij} \neq 0 \tag{3}$$

Используя теорему: «Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца (или строки) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю» [3], запишем для второго столбца

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + n_{n2}A_{n1} = 0 \tag{4}$$

Учитывая (3), получаем из (4)

$$a_{n2}A_{n1} = 0, \quad \text{но} \quad a_{n2} \neq 0$$

Следовательно, $A_{n1} = 0$, что и требовалось доказать.

Изложенную выше теорему можно также доказать, пользуясь другими соображениями: каждое из равенств (3) накладывает определенные условия на элементы определителя (2); совокупность этих условий (3) дает $|a_{ij}|_n^1 = 0$. Для доказательства возьмем известную теорему: «Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда между его столбцами (строками) существует линейная зависимость» [3]. Исходя из этого, запишем равенства (3) следующим образом:

$A_{11} \equiv 0$

$$\mu_1 \begin{vmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{vmatrix} + \mu_2 \begin{vmatrix} a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \dots + \mu_{n-1} \begin{vmatrix} a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{5}$$

$A_{21} \equiv 0$

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{6}$$

$A_{31} \equiv 0$

$$\sigma_1 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{42} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{vmatrix} + \sigma \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{43} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \dots + \sigma_{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{4n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{7}$$

$A_{n-1,1} \equiv 0$

$$k_1 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n-2,2} \\ a_{n2} \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n-2,3} \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \dots + k_{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-2,n} \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{8}$$

где постоянные коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, как и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$; $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, не равны одновременно нулю.

Можно записать всего $(n - 1)$ таких равенств. При образовании их вычеркиваем первый столбец, так что в равенствах участвуют $(n - 1)$ элементов каждой строки исходного определителя.

Можно заметить, что для каждой из $(n - 1)$ первых строк имеем $(n - 2)$ уравнения.

Для последней, n-ой строки имеем $(n - 1)$ уравнений. Выпишем их

$$\begin{aligned} &\mu_1 a_{n2} + \mu_2 a_{n3} + \ldots + \mu_{n-1} a_{nn} = 0 \\ &\lambda_1 a_{n2} + \lambda_2 a_{n3} + \ldots + \lambda_{n-1} a_{nn} = 0 \\ &\sigma_1 a_{n2} + \sigma_2 a_{n3} + \ldots + \sigma_{n-1} a_{nn} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &k_1 a_{n2} + k_2 a_{n3} + \ldots + k_{n-1} a_{nn} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Имеем систему из $(n - 1)$ уравнений с $(n - 1)$ неизвестными. Так как коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ и, соответственно, коэффициенты других строк не все равны нулю, то определитель системы (9) должен быть равен нулю. Итак,

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Можно записать теперь любую строку (столбец) определителя (10) как линейную комбинацию элементов других строк. Берем

$$\mu_i = \varkappa_1 \lambda_i + \varkappa_2 \sigma_i + \ldots + \varkappa_{n-2} k_i \tag{11}$$

где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2}$ не равны одновременно нулю.

Подставим полученное выражение (11) в (5). Запишем из (5) выражение для второй строки исходного определителя

$$\begin{aligned} &(\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_2\sigma_1 + \ldots + \varkappa_{n-2}k_1)\, a_{22} + (\varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\sigma_2 + \ldots \\ &\ldots + \varkappa_{n-2}k_2)\, a_{23} + (\varkappa_1\lambda_3 + \varkappa_2\sigma_3 + \ldots + \varkappa_{n-2}k_3)\, a_{24} + \ldots \\ &\ldots + (\varkappa_1\lambda_{n-1} + \ldots + \varkappa_{n-2}k_{n-1})\, a_{2n} \equiv 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Выпишем теперь из $A_{31} \equiv 0$, $A_{41} \equiv 0, \ldots, A_{n-1,1} \equiv 0$ выражения для второй строки исходного определителя

$$\begin{aligned} &\sigma_1 a_{22} + \sigma_2 a_{23} + \ldots + \sigma_{n-1}\, a_{2n} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &k_1 a_{22} + k_2 a_{23} + \ldots + k_{n-1} a_{2n} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Умножаем эти равенства соответственно на коэффициенты $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ $\ldots, \varkappa_{n-2}$ и вычитаем из (12). Получим

$$\varkappa_1\, [\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 a_{23} + \ldots + \lambda_{n-1} a_{2n}] = 0 \tag{14}$$

но $\varkappa_1 \neq 0$ (если $\varkappa_1 = 0$, то выражаем из (10) не первую, а какую-либо другую строку, и проводим соответствующий вывод).

Тогда

$$\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 a_{23} + \ldots + \lambda_{n-1}\, a_{2n} \equiv 0 \tag{15}$$

Добавив равенство (15) к (6), получим, что один из столбцов исходного определителя (2) можно выразить как линейную комбинацию других столбцов. Следовательно, исходный определитель (2) равен нулю, что и требовалось доказать.

Инвариантность всех координат системы дифференциальных уравнений от возмущений, действующих соответственно на каждую из координат. Докажем следующую теорему.

Если приравняем тождественно нулю n адъюнктов диагональных элементов определителя $|a^{ij}|_n^1$, то сам определитель при этом не равен нулю.

Имеем определитель (2); пусть в нем

$$A_{11} \equiv 0,\ A_{22} \equiv 0, \ldots,\ A_{nn} \equiv 0 \quad \text{при} \quad a_{ij} \neq 0 \tag{16}$$

Запишем равенства (16) так:

$A_{11} \equiv 0$

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n-1,2} \\ a_{n2} \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \ldots + \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{17}$$

$A_{22} \equiv 0$

$$\beta_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \ldots + \beta_{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{18}$$

$A_{nn} \equiv 0$

$$\gamma_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \end{vmatrix} + \gamma_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n-1,2} \end{vmatrix} + \ldots \gamma +_{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,n-1} \\ a_{2,n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{19}$$

Имеем всего n таких равенств. В отличие от предыдущего случая здесь:

1) в записанных равенствах участвуют все n^2 элементов исходного определителя; в равенствах участвуют все n элементов каждой из строк;

2) для каждой строки (столбца) можно составить $(n-1)$ уравнений.

Следовательно, при равенстве нулю адъюнктов диагональных элементов определителя (2) нет возможности выразить какой-либо из произвольных коэффициентов α_i, $\beta_i, \ldots$, γ_i через другие; нет возможности представить один из столбцов (строк) исходного определителя как линейную комбинацию других столбцов (строк).

Значит, из $A_{11} \equiv 0$, $A_{22} \equiv 0 \ldots A_{nn} \equiv 0$ не следует $|a_{ij}|_n^1 = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, при приравнивании нулю адъюнктов диагональных элементов можно записать $(n-1)$ уравнений для каждой строки (столбца).

Чтобы выразить один из коэффициентов α, $\beta, \ldots, \gamma$ через другие, надо иметь n уравнений для какой-нибудь строки (столбца) исходного определителя.

Добавим к n адъюнктам диагональных элементов, равным нулю, еще один равный нулю адъюнкт произвольно расположенного элемента исходного определителя (2).

Пусть $A_{21} \equiv 0$

$$\delta_1 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{vmatrix} + \delta_2 \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{vmatrix} + \ldots + \delta_{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{20}$$

Теперь можно для любой строки исходного определителя, кроме второй, записать n уравнений.

Запишем их для третьей строки

$$
\begin{aligned}
&0\, a_{31} + \alpha_1 a_{32} + \alpha_2 a_{33} + \ldots + \alpha_{n-1} a_{3n} = 0 \\
&\beta_1 a_{31} + 0\, a_{32} + \beta_2 a_{33} + \ldots + \beta_{n-1} a_{3n} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\gamma_1 a_{31} + \gamma_2 a_{32} + \gamma_3 a_{33} + \ldots + 0\, a_{3n} = 0 \\
&0\, a_{31} + \delta_1 a_{32} + \delta_2 a_{33} + \ldots + \delta_{n-1} a_{3n} = 0
\end{aligned} \tag{21}
$$

Определитель системы (21) равен нулю

$$
\begin{vmatrix}
0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\
\beta_1 & 0 & \beta_2 & \ldots & \beta_{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \ldots & 0 \\
0 & \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_{n-1}
\end{vmatrix} \equiv 0 \tag{22}
$$

Можно выразить одну из строк определителя (22) через другие

$$
\begin{aligned}
0 &= \eta_1 \beta_1 + \ldots + \eta_{n-2} \gamma_1 \\
\alpha_1 &= \eta_1\, 0 + \ldots + \eta_{n-2} \gamma_2 + \eta_{n-1} \delta_1 \\
\alpha_2 &= \eta_1 \beta_2 + \ldots + \eta_{n-2} \gamma_3 + \eta_{n-1} \delta_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n-1} &= \eta_1 \beta_{n-1} + \ldots + \eta_{n-1} \delta_{n-1}
\end{aligned} \tag{23}
$$

где $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ не равны одновременно нулю.

Подставим эти выражения в (17), получим уравнение для второй строки

$$
(\eta_1 \beta_1 + \ldots + \eta_{n-2} \gamma_1)\, a_{21} + (\eta_1\, 0 + \ldots + \eta_{n-2} \gamma_2 + \eta_{n-1} \delta_1)\, a_{23} + \ldots + (\eta_1 \beta_{n-1} + \ldots + \eta_{n-1} \delta_{n-1})\, a_{2n} = 0 \tag{24}
$$

Выписываем уравнения для второй строки из $A_{33} \equiv 0$, $A_{44} \equiv 0 \ldots \ldots A_{nn} \equiv 0$, $A_{21} \equiv 0$, умножаем их соответственно на $\eta_2, \eta_3 \ldots \eta_{n-1}$ и вычитаем из (24).

Получим

$$
\beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{23} + \ldots + \beta_{n-1} a_{2n} = 0 \tag{25}
$$

что вместе с (18) дает равенство нулю исходного определителя (2).

Практическое достижение полиинвариантности в системе (1). Решим теперь следующую задачу: дан определитель (2) и требуется обеспечить равенство нулю m адъюнктов определителя (2), причем $m < n - 1$, т. е. $|a_{ij}|_n^1 \neq 0$.

В самом общем случае равенство нулю какого-либо адъюнкта A_{ij} можно удовлетворить изменением одного из элементов a_{ij}, входящих в этот адъюнкт. Следовательно, для равенства нулю m адъюнктов нужно иметь m переменных элементов, входящих в эти адъюнкты. Например, если требуется обеспечить равенства: $A_{11} \equiv 0$, $A_{n1} \equiv 0$, $A_{23} \equiv 0$, то требуется наличие трех переменных элементов, входящих в эти адъюнкты. Обозначим их x_1, x_2, x_3. При известных остальных элементах адъюнктов можно записать

$$
\begin{aligned}
A_{11}(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
A_{n1}(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
A_{23}(x_1, x_2, x_3) &= 0
\end{aligned}
$$

Из полученной системы трех уравнений с тремя неизвестными находим x_1, x_2, x_3. Таким способом практически добиваемся инвариантности одной из координат системы от нескольких возмущений или нескольких координат от одного возмущения.

Об одном особом случае [4]. В предыдущих выводах было принято условие: $a_{ij} \neq 0$. Это было сделано из-за следующего особого случая: в адъюнктах, обращающихся в нуль, имеется строка (столбец), состоящая из нулевых элементов. При этом адъюнкт обращается в нуль без наложения каких-либо требований на другие элементы: они могут быть произвольными. В этом случае может быть, в частности $(n - 1)$ адъюнкта одной строки или столбца, равные нулю без обращения в нуль определителя.

Но этот частный случай легко свести к общему. Нужно учесть, что определитель $|a_{ij}|_n^1$ является определителем матрицы коэффициентов системы (1). Вышеуказанный особый случай приводит к возможности сразу же решить относительно неизвестной одно из уравнений системы (1), т. е. к понижению порядка системы. Действуя аналогично, всегда можно привести систему (1) к виду, в котором, несмотря на отдельные нулевые элементы, обращение в нуль адъюнкта определителя $|a_{ij}|_n^1$ накладывает определенные требования на его элементы.

Заключение. Было рассмотрено применение теории инвариантности к многосвязной, или многопараметрической, системе автоматического регулирования при предположении, что процессы в системе могут быть с достаточной точностью описаны линейными неоднородными дифференциальными уравнениями, причем ранг расширенной матрицы коэффициентов системы этих уравнений не должен превышать ранг основной матрицы коэффициентов.

1. Из доказанных теорем следует, что получены необходимые условия для инвариантности одной координаты от $(n - 2)$ возмущений или $(n - 2)$ координат от одного возмущения, так как возможно приравнивание нулю $(n - 2)$ адъюнктов элементов одной строки или столбца определителя $|a_{ij}|_n^1$ с $a_{ij} \neq 0$;

2. Получены необходимые условия для инвариантности каждой из координат системы по отношению к действующему на ней возмущению, так как возможно приравнивание нулю n адъюнктов диагональных элементов определителя.

3. Возможно равенство нулю $(n - 1)$ адъюнктов произвольно расположенных элементов определителя (но не принадлежащих одной строке или столбцу).

4. Определитель $|a_{ij}|_n^1$ при $a_{ij} \neq 0$ обращается в нуль при:

а) приравнивании нулю $(n - 1)$ адъюнктов элементов одной строки или столбца,

б) приравнивании нулю n адъюнктов, не лежащих на диагонали,

в) приравнивании нулю $(n + 1)$ адъюнктов элементов, причем n из этих элементов лежат на диагонали.

Поступило 30 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. Автоматика и телемеханика, 1940, № 5.
2. Лузин Н. Н. и Кузнецов П. И. К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1946, т. 51, № 4, 5.
3. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. М., 1952.
4. Симонов Н. И. Абсолютная инвариантность для линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений. Теория инвариантности и ее практическое применение. Труды Совещания, Изд. АН УССР, 1959.

Кулебакин В. С., Ларичев О. И. О полиинвариантности в системах автоматического регулирования // *Известия АН СССР. «Энергетика и автоматика»*. —1961. — № 5.— С. 7–12.

```
@Article{Kulebakin_Larichev_1961,
  author =       "Кулебакин, В. С. and Ларичев, О. И.",
  title =        "О полиинвариантности в системах автоматического
                  регулирования",
  journal =      "Известия АН СССР. <<Энергетика и автоматика>>",
  number =       "5",
  pages =        "7--12",
  year =         "1961",
  language =     "russian",
}
```