

Моделирование поведения и интеллекта

УДК 62-505:65.01

ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ДОСТОВЕРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПРЕДПОЧТЕНИЯХ ЛИЦА, ПРИНИМАЮЩЕГО РЕШЕНИЯ

**ГНЕДЕНКО Л. С., ЛАРИЧЕВ О. И., МОШКОВИЧ Е. М.,
ФУРЕМС Е. М.**

(Москва)

Исследуется задача построения на множестве векторных оценок объектов по критериям качества бинарного отношения предпочтения — безразличия, являющегося в общем случае квазипорядком. Формулируются основные требования, которым должен удовлетворять метод решения задачи: они предполагают использование только той информации от лица, принимающего решения (ЛПР), которую он, согласно данным дескриптивных исследований, может давать достаточно легко. Метод должен предусматривать проверку такой информации на непротиворечивость и включать эффективную процедуру устранения возможных противоречий. Предлагается алгоритмизированная процедура построения квазипорядка, использующая аксиому о независимости критериев по предпочтению (с ее проверкой), свойство транзитивности искомого отношения и удовлетворяющая сформулированным требованиям.

1. Введение

Существует большое количество проблем принятия решений, где ценность каждого из рассматриваемых альтернатив характеризуется совокупностью оценок по многим критериям. Многокритериальность хорошо отражает особенности многих практических задач, в которых необходимо принять во внимание большое число разнородных факторов. В задачах принятия индивидуальных решений при многих критериях обычно предполагается, что существует лицо, принимающее решения (ЛПР) и несущее ответственность за их последствия. На основании информации ЛПР строится решающее правило, позволяющее сравнивать многокритериальные альтернативы. Тем самым, в методах принятия решений можно выделить два основных этапа:

- 1) получение информации от ЛПР в той или иной форме;
- 2) построение решающего правила на основе полученной от ЛПР информации.

При построении решающего правила центральным является вопрос о том, как выявлять предпочтения ЛПР, позволяющие перейти от оценок по многим критериям к целостным оценкам альтернатив в требуемом виде (например, в виде классов окончательных решений [1, 2] или в виде бинарного отношения предпочтения-безразличия, построенного на множестве альтернатив).

Обоснованием корректности этапа получения информации от ЛПР является соответствие требований метода возможностям получения от людей надежной непротиворечивой информации. Этот критерий (см. [3]) приложим ко всем методам принятия решений.

Критерием обоснованности второго этапа — построение решающего правила — является корректность перехода к требуемому виду решающего правила от информации о предпочтениях ЛПР.

Существует достаточно широкий класс практических задач, в которых требуется построить квазипорядок на полном множестве многокритериальных альтернатив.

В работе [1] было впервые предложено использовать для решения таких задач корректный способ получения информации от ЛПР — так называемую «замкнутую» процедуру, то есть процедуру, включающую в себя проверку на непротиворечивость получаемой информации. ЛПР сравнивает изменение качества на шкалах двух критериев, а прочие оценки принадлежат «опорным ситуациям» (все лучшие или все худшие). Рассматриваются все пары критериев. С увеличением числа критериев увеличивается и количество избыточной информации, получаемой от ЛПР, что позволяет осуществить ее проверку на непротиворечивость. Эти идеи получили дальнейшее развитие в методе ЗАПРОС (ЗАмкнутые ПРОцедуры у Опорных Ситуаций [2]).

В данной работе предлагается новый метод построения квазипорядка. В нем используются корректные процедуры получения информации о предпочтениях ЛПР, близкие к использованным ранее [1, 2], но содержащие специально разработанную процедуру выявления и устранения противоречий в получаемой от ЛПР информации, кроме того, новым является обоснование способа перехода от информации о предпочтениях ЛПР к решающему правилу, в котором проверяется выполнение условия независимости критериев по предпочтению [4–8] и используется условие транзитивности получаемого бинарного отношения предпочтения-безразличия [9]. Построение квазипорядка осуществляется непосредственно на информации, получаемой от ЛПР, отражающей его предпочтения в содержательных понятиях, без перехода к каким-либо количественным оценкам, а также не вводятся эвристики, используемые в методе ЗАПРОС [2]. Таким образом, делается попытка конкретного обоснования как первого, так и второго этапов метода построения квазипорядка на множестве многокритериальных альтернатив.

2. Постановка задачи и основные этапы метода

В данной работе не рассматривается общий для многих методов принятия решений этап разработки перечня критериев и шкал оценок (см. [10]). Предполагается, что предварительно выбраны критерии и для каждого из них построена порядковая шкала словесно сформулированных оценок, определяющих разные уровни качества по данному критерию. Тогда полное множество многокритериальных альтернатив определяется декартовым произведением шкал критериев в многокритериальном пространстве.

Введем необходимые обозначения: Q — число критериев, $K = \{q | q = \overline{1, Q}\}$ — множество номеров критериев; ω_q — число оценок по шкале q -го критерия ($q \in K$) $X_q = \{x_i^q\}$ — множество номеров оценок q -го критерия, расположенных в порядке убывания их качества (шкала q -го критерия), $|X_q| = \omega_q$, $x_1^q < x_2^q < \dots < x_{\omega_q}^q$, $q \in K$; $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_Q$ — множество векторных оценок, $|Y| = N = \prod_{q=1}^Q \omega_q$; $\alpha_i \in Y$ — векторная оценка вида $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iQ})$, где $\alpha_{iq} \in X_q$, $i = \overline{1, N}$.

Требуется на множестве Y построить на основе предпочтений ЛПР отношение квазипорядка. Способ его построения должен удовлетворять требованиям корректности как по получению информации от ЛПР, так и по ее преобразованию.

Предлагаемая процедура построения квазипорядка на множестве многокритериальных альтернатив состоит из ряда этапов, представленных на рисунке.

3. Получение информации о предпочтениях ЛПР

Полученная от ЛПР информация об упорядоченности оценок по шкалам отдельных критериев позволяет определить на множестве Y асим-



метрическое транзитивное отношение доминирования

$$P^0 = \{(\alpha_i, \alpha_j) \in Y \times Y \mid \forall q = \overline{1, Q} \quad \alpha_{iq} \leq \alpha_{jq} \text{ и } \exists q_0, \text{ такое, что } \alpha_{iq_0} < \alpha_{jq_0}\}.$$

Дальнейшее расширение данного бинарного отношения на множестве возможно лишь за счет получения дополнительной информации от ЛПР о его системе предпочтения.

Дескриптивные исследования последних лет, проводимые в нашей стране и за рубежом [11–16] показывают, что человек достаточно надежно может сравнивать пары векторных оценок, отличающихся компонентами только по двум критериям, причем по одному из них оценка должна быть наилучшей.

Определение 1. Будем называть допустимыми для опроса пары векторных оценок следующего вида:

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iQ}),$$

$$\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jQ}),$$

где $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \quad \forall k = \overline{1, Q}, k \neq S, k \neq T$; $\alpha_{iS} = x_m^S$; $\alpha_{iT} = x_l^T$; $\alpha_{jS} = x_1^S$, $\alpha_{jT} = x_l^T$, где $x_m^S \in X_S$, $x_l^T \in X_T$.

Как и в методе ЗАПРОС [2] будем выявлять предпочтения между парами допустимых векторных оценок у двух так называемых «опорных» ситуаций. Каждая векторная оценка создает у ЛПР образ некоторого объекта, обладающего свойствами, которые характеризуются оценками по критериям качества. Наиболее яркими «контрастными» для ЛПР явля-

ются два образа, соответствующие сочетания только лучших или только худших оценок по всем критериям.

Определение 2. Векторные оценки, имеющие только лучшие или только худшие значения по всем критериям, будем называть опорными ситуациями.

ЛПР предъявляется для сравнения допустимая пара векторных оценок α_i и α_j у одной из опорных ситуаций. Возможны следующие ответы ЛПР:

- 1) первая альтернатива предпочтительнее второй;
- 2) вторая альтернатива предпочтительнее первой;
- 3) альтернативы равноценны.

Определение 3. Списком векторных оценок у опорной ситуации будем называть подмножество векторных оценок из Y , имеющих по всем критериям, кроме двух, те же значения, что и у данной опорной ситуации. При этом, по одному из выделенных двух критериев берется лучшее значение, а по другому — любое, отличное от лучшего, значения его шкалы.

Пусть L — список векторных оценок у одной из опорных ситуаций. Проведем необходимый опрос ЛПР для сравнения всех пар векторных оценок из этого списка. Результаты попарного сравнения, проведенного ЛПР, выразим в виде бинарных отношений:

1) отношение предпочтения $P_{\text{ЛПР}} \subseteq L \times L : (\alpha_i, \alpha_j) \in P_{\text{ЛПР}}$ тогда и только тогда, когда α_i по мнению ЛПР предпочтительнее, чем α_j , либо $(\alpha_i, \alpha_j) \in P^0$; 2) отношения предпочтения $P_{\text{ЛПР}}^{-1} = \{(\alpha_i, \alpha_j) \in L \times L \mid (\alpha_j, \alpha_i) \in P_{\text{ЛПР}} \text{ и } (\alpha_i, \alpha_j) \notin P_{\text{ЛПР}}\}$; 3) отношения равноценности $I_{\text{ЛПР}} \subseteq L \times L$, которое задается на парах альтернатив (α_i, α_j) , равноценных для ЛПР, либо когда $i=j$. Так как ответ ЛПР: α_i предпочтительнее, чем α_j означает, что $(\alpha_i, \alpha_j) \in P_{\text{ЛПР}}$ и $(\alpha_j, \alpha_i) \notin P_{\text{ЛПР}}$, а ответ ЛПР: α_i и α_j равноценны, — означает, что $(\alpha_i, \alpha_j) \in I_{\text{ЛПР}}$ и $(\alpha_j, \alpha_i) \in I_{\text{ЛПР}}$, то отношение $P_{\text{ЛПР}}$ асимметрично и антирефлексивно, а отношение $I_{\text{ЛПР}}$ рефлексивно и симметрично. Так как в ходе опроса ЛПР сравниваются все пары векторных оценок из L , то очевидно, что $I_{\text{ЛПР}} = P_{\text{ЛПР}} \cup P_{\text{ЛПР}}^{-1}$.

Потребуем, чтобы отношения $P_{\text{ЛПР}}$ и $I_{\text{ЛПР}}$ были транзитивными. Тогда согласно [9], отношение $I_{\text{ЛПР}}$ будет отношением эквивалентности, отношение $P_{\text{ЛПР}}$ — квазисерией, обладающей свойством обобщенной транзитивности, а отношение $R = P_{\text{ЛПР}} \cup I_{\text{ЛПР}}$ — линейным квазипорядком на множестве L .

Будем называть противоречием в информации о предпочтениях ЛПР нарушение транзитивности отношения R . Согласно [9], транзитивность R предусматривает следующее:

- (1) $[(\alpha_i, \alpha_j) \in P_{\text{ЛПР}}, (\alpha_j, \alpha_k) \in P_{\text{ЛПР}}] \Rightarrow (\alpha_i, \alpha_k) \in P_{\text{ЛПР}},$
- (2) $[(\alpha_i, \alpha_j) \in I_{\text{ЛПР}}, (\alpha_j, \alpha_k) \in I_{\text{ЛПР}}] \Rightarrow (\alpha_i, \alpha_k) \in I_{\text{ЛПР}},$
- (3) $[(\alpha_i, \alpha_j) \in P_{\text{ЛПР}}, (\alpha_j, \alpha_k) \in I_{\text{ЛПР}}] \Rightarrow (\alpha_i, \alpha_k) \in P_{\text{ЛПР}},$
- (4) $[(\alpha_i, \alpha_j) \in I_{\text{ЛПР}}, (\alpha_j, \alpha_k) \in P_{\text{ЛПР}}] \Rightarrow (\alpha_i, \alpha_k) \in P_{\text{ЛПР}}.$

При любом опросе ЛПР возможны ошибки в его ответах. Они могут быть либо случайными, либо возникать при сравнении близких по качеству альтернатив [9]. Поэтому в информации, получаемой от ЛПР, могут появиться противоречия (нарушение транзитивности отношений $P_{\text{ЛПР}}$, $I_{\text{ЛПР}}$, т. е. найдутся такие тройки альтернатив $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \in L$, для которых не выполняется какое-либо из соотношений (1)–(4)). Поэтому в приложении 1 предлагается специальная процедура дополнительного опроса ЛПР с целью выявления и устранения этих противоречий. Результатом данного этапа является установление на парах множества L отношения $R = P_{\text{ЛПР}} \cup I_{\text{ЛПР}}$, которое является линейным квазипорядком.

Сформируем список альтернатив у первой опорной ситуации:

$$L_1 = \{\alpha_i \mid \alpha_{iq} = x_1^q \forall q = \overline{1, Q}, q \neq S, \alpha_{iS} = x_k^S, k \neq 1, \forall S \in K\}.$$

Так как для каждого критерия S число таких векторных оценок равно

$(\omega_s - 1)$, то общее число векторных оценок в списке равно

$$N_1 = \sum_{s=1}^Q (\omega_s - 1).$$

Аналогично сформируем список альтернатив у второй опорной ситуации: $L_2 = \{\alpha_i | \alpha_{iq} = x_{\omega q}^q \forall q=1, \dots, Q, q \neq S, \alpha_{is} = x_s^s, q \neq T, \alpha_{it} = x_1^t, k \neq 1, \forall S \in K, \forall T \in K, S \neq T\}$.

При каждом фиксированном S число векторных оценок с $x_1^t, \forall T \in K$ равно $(Q-1)(\omega_s - 1)$, а для всех $S = \overline{1, Q}$, что составляет $(Q-1) \sum_{s=1}^Q (\omega_s - 1)$.

В этом числе несколько раз учтены векторные оценки, имеющие по одному критерию лучшую оценку, а по остальным — худшие, отсюда общее число оценок в списке L_2 равно $N_2 = (Q-1) \sum_{s=1}^Q (\omega_s - 1) - Q(Q-2)$.

Опрос лица, принимающего решение, проводится отдельно для каждой опорной ситуации, сначала у первой, а затем — у второй. Тем самым на множестве пар $L_1 \times L_1$ будет задано отношение линейного квазипорядка R_1 , а на множестве пар $L_2 \times L_2$ — отношение квазипорядка R_2 .

Информация, полученная от ЛПР у второй опорной ситуации, используется для проверки условия независимости по предпочтению.

4. Проверка условия независимости по предпочтению каждой пары критериев от остальных

Нетрудно убедиться, что сравнения у опорных ситуаций затрагивают лишь небольшую часть всех допустимых пар альтернатив. Однако полученная от ЛПР информация может быть использована для сравнения значительно большего числа пар альтернатив при выполнении условия независимости по предпочтению любых двух критериев от остальных. Это условие [4–8] состоит в том, что предпочтение между векторными оценками, отличающимися только по этим критериям, не зависит от фиксированных значений оценок по остальным критериям. Если условие независимости по предпочтению справедливо, то сравнение всех пар допустимых оценок можно получить на основе информации о предпочтениях между векторными оценками у одной из опорных ситуаций.

Эффективный способ проверки условия независимости по предпочтению состоит в сравнении информации о предпочтениях ЛПР, полученной для той же пары критериев у двух выделенных опорных ситуаций. Как указывалось выше, эти опорные ситуации представляют собой для ЛПР два ярких, контрастных образа. Если, несмотря на их различия, ЛПР одинаково сравнивает соответствующие векторные оценки, то можно считать такую проверку достаточно достоверной. Учтем также, что рассматриваются все возможные пары критериев $Q(Q-1)$ пар, что делает проверку достаточно полной (отметим, также, что она более полная, чем в других методах [17], хотя и не является исчерпывающей).

Возьмем пару критериев S, T и выделим из списков L_1 и L_2 векторные оценки, относящиеся к этой паре. Если для любых фиксированных и одинаковых оценок по критериям S и T сравнения между соответствующими парами векторных оценок одинаковы, то есть основания считать данную пару критериев независимой по предпочтению от остальных.

Такую проверку осуществляем для каждой пары критериев.

5. Случай зависимости критериев

Если для какой-либо пары критериев результаты сравнений у опорных ситуаций различны, то имеет место зависимость критериев по предпочтению, то есть зависимость сравнений от опорной ситуации. В этом

случае содержательный анализ, проводимый совместно с ЛПР, позволяет обычно установить те оценки по прочим критериям, которые совместно с оценкой по S -му критерию или по T -му критерию образуют «новое качество» для ЛПР.

Пусть, например, оценка $x_{\omega_l}^l$ является причиной другого сравнения пары векторных оценок для критериев S и T у второй опорной ситуации (по сравнению с первой). Тогда формируется новая опорная ситуация, для которой

$$L_2^1 = \{\alpha_i \in Y \mid \alpha_{iq} = x_{\omega_q}^q \forall q = \overline{1, Q}, q \neq l, q \neq S, q \neq T, \alpha_{il} = x_{\omega_{l-1}}^l,$$

$$\alpha_{iS} = x_k^S, \alpha_{iT} = x_1^T, k \neq 1, x_k^S \in X_S, \forall S \in K, \forall T \in K, S \neq T\}.$$

Для списка L_2 у новой опорной ситуации производится опрос ЛПР. Если информация о сравнениях, относящаяся к соответствующим парам векторных оценок из L_1 и L_2^1 совпадает, то таким образом выделяется подмножество векторных оценок, для которых справедливо условие независимости по предпочтению. Что касается того подмножества оценок, для которого установлена зависимость критериев, то здесь можно использовать лишь условие доминирования.

6. Использование информации о предпочтениях ЛПР для сравнения некоторых векторных оценок

Если два критерия S и T не зависят по предпочтению от остальных критериев, то отношение предпочтения, установленное на соответствующей паре векторных оценок $\alpha_i \in L_1$ и $\alpha_j \in L_1$ будет сохраняться для любых пар векторных оценок $\alpha_i' \in Y$ и $\alpha_j' \in Y$ следующего вида:

$$\alpha_i' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \alpha_{iS}, \beta_{S+1}, \dots, \alpha_{iT}, \dots, \beta_Q),$$

$$\alpha_j' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \alpha_{jS}, \beta_{S+1}, \dots, \alpha_{jT}, \dots, \beta_Q),$$

где $\beta_q \in X_q, q \in K, q \neq S, q \neq T$.

Кроме того, попарная независимость всех критериев позволяет воспользоваться правилом сравнения пар векторных оценок [18, 19].

Определение 4. Будем говорить, что значение x_i^S не менее предпочтительно значения x_j^T ($i \neq 1, j \neq 1$), если справедливо следующее:

$$(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{S-1}, x_i^S, x_1^{S+1}, \dots, x_1^Q) R_1 (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{T-1}, x_j^T, x_1^{T+1}, \dots, x_1^Q).$$

Запишем это в виде $x_i^S R_1 x_j^T$.

Тогда правило из [18, 19] можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение. При попарной независимости критериев по предпочтению векторная оценка $\alpha_i \in Y$ не менее предпочтительна векторной оценки $\alpha_j \in Y$, т. е. $(\alpha_i, \alpha_j) \in R_3$, если $\forall T \in K$, такого, что $\alpha_{iT} \neq x_1^T \exists S(T) \in K$, такое, что $\alpha_{jS(T)} \neq x_1^{S(T)}$ и $\alpha_{iT} R_1 \alpha_{jS(T)}$. При этом $\forall T, U \in K$, таких, что $T \neq U, S(T) \neq S(U)$.

Доказательство утверждения приводится в приложении 2.

В общем случае исходную задачу сравнения двух векторных оценок по введенному правилу можно поставить в виде задачи о максимальном паросочетании [20, 21]. Составим для каждой компоненты $\alpha_{iq} \neq x_1^q$ список S_{jq} тех компонент $\alpha_{jT} \neq x_1^T$, для которых $\alpha_{iq} R_1 \alpha_{jT}$. Пусть $M_i = \{q \mid \alpha_{iq} \neq x_1^q\}$, $M_j = \{q \mid \alpha_{jq} \neq x_1^q\}$. Теперь задача сравнения векторных оценок α_i и α_j будет заключаться в установлении взаимно-однозначного соответствия между компонентами $\alpha_{iq} (q \in M_i)$ и $\alpha_{jT} \in S_{jq}$.

Необходимое и достаточное условие существования такого решения определяется теоремой Холла [20], которая в терминах данной задачи может быть сформулирована следующим образом: для того, чтобы установить взаимно-однозначное соответствие между компонентами $\alpha_{iq} (q \in M_i)$ и $\alpha_{jT} \in S_{jq}$, необходимо и достаточно, чтобы мощность любого пересечения списков $S_{jq} (q \in M_i)$ была не меньше числа тех компонент α_{iq} , которым они соответствуют.

Для решения задачи о максимальном паросочетании существует точный эффективный алгоритм (см., например [22]) с трудоемкостью $O(Q^3)$. Если $|M_i| < |M_j|$, то отсутствие решения задачи о максимальном паросочетании свидетельствует о несравнимости векторных оценок α_i и α_j . Если же $|M_i| = |M_j|$, то при отсутствии решения следует попытаться поменять местами эти векторные оценки и искать взаимно-однозначное соответствие между компонентами $\alpha_{jq} (q \in M_j)$ и $\alpha_{it} \in S_{iq}$.

Очевидно, что применение данного правила сравнения векторных оценок не может привести к нарушению транзитивности отношения R_3 , т. к., если $\alpha_i R_3 \alpha_j$ и $\alpha_j R_3 \alpha_k$, то для каждой компоненты вектора α_k найдется такая своя компонента вектора α_i , которая не менее предпочтительна, чем данная компонента вектора α_k , и, следовательно, $\alpha_i R_3 \alpha_k$. Отношение R_3 , установленное на некоторых парах векторных оценок из Y , не будет противоречить установленному на Y отношению строгого доминирования P^0 , т. к. отношение P^0 является частным случаем отношения R_3 .

Определим в результате отношение $R = P^0 \cup R_1 \cup R_3$ на парах оценок множества Y . Отношение R может быть расширено путем построения транзитивного замыкания R^* бинарного отношения $R \subset R^*$ [23].

В результате на множестве Y будет задано рефлексивное и транзитивное отношение R^* , т. е. отношение квазипорядка.

7. Заключение

Предложенная процедура построения квазипорядка на множестве векторных оценок представляет собой совокупность алгоритмов, реализующих диалог между ЛПР и ЭВМ. Он основывается на данных дескриптивных исследований в области принятия решений, определяющих виды информации, которая может быть достаточно надежно получена от ЛПР. Как и метод ЗАПРОС, эта процедура является замкнутой, то есть включает в себя проверку на непротиворечивость и устранение противоречий в информации о предпочтениях ЛПР. Отличительной особенностью данной процедуры является корректность обработки получаемой от ЛПР информации с целью построения бинарного отношения на основе свойства его транзитивности и независимости критериев по предпочтению.

В заключение авторы выражают благодарность Н. В. Завалишину и Б. Г. Миркину за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть имеется множество альтернатив $Y = \{\alpha_i\}$, $i = 1, L$. Для каждой пары альтернатив $(\alpha_i, \alpha_j) \in Y \times Y$ ($i \neq j$) установлено одно из следующих отношений:

- 1) $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$, т. е. α_i предпочтительнее α_j ,
- 2) $(\alpha_j, \alpha_i) \in P$, т. е. α_j предпочтительнее α_i ,
- 3) $(\alpha_i, \alpha_j) \in I$ ($(\alpha_j, \alpha_i) \in I$), т. е. α_i и α_j эквивалентны.

Таким образом, на множестве Y установлено отношение предпочтения и эквивалентности $R = P \cup I$.

Построим матрицу $A = \|a_{ij}\|$ размерности $L \times L$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha_i, \alpha_j) \in P \quad i \neq j \\ -1, & \text{если } (\alpha_j, \alpha_i) \in P \quad i \neq j \\ 1/2, & \text{если } (\alpha_i, \alpha_j) \in I \end{cases}$$

Согласно [24] в общем случае возможны следующие 7 типов связи на произвольной тройке объектов (с точностью до нумерации):

- 1) $(\alpha_i, \alpha_j) \in I$, $(\alpha_j, \alpha_k) \in I$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in I$,
- 2) $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$, $(\alpha_j, \alpha_k) \in I$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in I$,
- 3) $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$, $(\alpha_k, \alpha_j) \in P$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in I$,
- 4) $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$, $(\alpha_j, \alpha_k) \in P$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in I$,
- 5) $(\alpha_j, \alpha_i) \in P$, $(\alpha_j, \alpha_k) \in P$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in I$,
- 6) $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$, $(\alpha_j, \alpha_k) \in P$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in P$,
- 7) $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$, $(\alpha_j, \alpha_k) \in P$, $(\alpha_i, \alpha_k) \in P$.

Соотношения типа 2), 4) и 6) являются нетранзитивными. Очевидно, что в мат-

рице A эти отношения будут представлены минорами 2-го порядка вида

$$F_1 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & 1 & 1/2 \\ \alpha_j & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}, \quad F_2 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & 1 & 1/2 \\ \alpha_j & 1/2 & 1 \end{vmatrix}, \quad F_3 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & 1 & -1 \\ \alpha_j & 1/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Транзитивным тройкам объектов (с точностью до нумерации альтернатив) будут соответствовать миноры 2-го порядка в матрице A вида

$$H_1 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & 1/2 & 1/2 \\ \alpha_j & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}, \quad H_2 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & 1 & 1/2 \\ \alpha_j & 1/2 & -1 \end{vmatrix}, \quad H_3 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & -1 & 1/2 \\ \alpha_j & 1/2 & 1 \end{vmatrix}, \quad H_4 \begin{vmatrix} & \alpha_j & \alpha_k \\ \alpha_i & 1 & 1 \\ \alpha_j & 1/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием отсутствия нетранзитивности в установленном на множестве Y отношении R является отсутствие миноров вида F_1, F_2 и F_3 в матрице A . Поскольку матрица A квадратная, каждый элемент a_{ij} однозначно определяет a_{ji} , то достаточно выполнения этого условия в наддиагональной части матрицы A .

Утверждение 1. Для транзитивности отношения R , установленного на множестве Y , достаточно, чтобы

- 1) для $\forall i=1, \overline{L} \quad a_{ji} \times a_{ki} \geq 0 \quad \forall j, k=1, i-1, j \neq k$;
- 2) для $\forall i=1, \overline{L}$; если $\exists a_{ji}=1/2$, то $\exists a_{ki}$, такого, что $|a_{ki}|=1$ и $k > j$ ($k, j=1, i-1$);
- 3) если $a_{i-1, i}=1/2$ и $a_{j-1, j}=1/2$, то $|i-j| > 1$;
- 4) если $\exists i$ ($i=1, \overline{L}$), такое, что $a_{ji}=1/2 \quad \forall j=i-l, i-1 \quad (1 \leq l \leq i-1)$, то $a_{km}=1/2 \quad \forall k=i-l, i-2; m=k+1, i-1$, а $a_{km} \times a_{nm} > 0$ для всех $n, k=1, \overline{L-l-1}$ и $m=i-l, i$.

Условия (1)–(4) означают следующее:

1) элементы одного столбца в наддиагональной части матрицы A не должны быть одного знака;

2) элементы, равные $1/2$, могут быть только нижними элементами наддиагональной части матрицы A ;

3) если в некоторых столбцах наддиагональной части матрицы имеется только по одному элементу, равному $1/2$, то они не должны находиться в соседних столбцах;

4) если в некотором столбце j имеется l элементов, равных $1/2$, то все элементы, находящиеся левее j и ниже $j-l+1$ в наддиагональной части матрицы A , также должны быть равны $1/2$, а все остальные элементы в этих столбцах – одного знака.

Доказательство. 1. Пусть последний L -ый столбец наддиагональной части матрицы A не содержит элементов, равных $1/2$. Это означает, что альтернатива α_L предпочтительнее (либо менее предпочтительна) всех остальных альтернатив множества Y . Следовательно, альтернатива α_L не может входить в нетранзитивную тройку и может быть удалена из дальнейшего рассмотрения. Исключим из матрицы A L -ый столбец и L -ую строку. Получим матрицу A' размерности $(L-1) \times (L-1)$, для которой справедливы приведенные ранее рассуждения.

2. Пусть в L -м столбце элемент $a_{L-1, L}=1/2$. Это означает, что альтернативы α_{L-1} и α_L эквивалентны. Если других элементов, равных $1/2$, в столбцах $\overline{L-1}$ и L нет, то альтернативы α_{L-1} и α_L доминируются (или доминируют над) всеми остальными альтернативами множества Y , они не входят в нетранзитивную тройку и могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

3. Пусть теперь в L -м столбце матрицы A имеется l элементов, равных $1/2$ (т. е. $a_{ji}=1/2, j=i-l, \overline{L-1}$) исходя из условия 4) утверждения. В силу условия 4), это означает, что альтернативы $\alpha_j, j=\overline{L-l}, \overline{L}$ эквивалентны между собой, а все остальные альтернативы доминируются (доминируют над) этими альтернативами. Следовательно, альтернативы $\alpha_j, j=\overline{L-l}, \overline{L}$ не входят в нетранзитивные тройки и могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

Таким образом, в матрице A , удовлетворяющей условиям 1), 2), 3) и 4) нарушения нетранзитивности нет, что и требовалось доказать.

Определение. Назовем оптимальной такую последовательность альтернатив в множестве Y , которой соответствует матрица $A_{\text{опт}}$, содержащая минимальное число отрицательных элементов в своей наддиагональной части. Матрицу $A_{\text{опт}}$ назовем оптимальной.

Утверждение 2. Любую матрицу A , соответствующую транзитивному бинарному отношению R , установленному на множестве Y , можно преобразовать в матрицу $A_{\text{опт}}$, у которой все элементы наддиагональной части матрицы положительны.

Доказательство. Так как бинарное отношение R транзитивно и связно, то на множестве Y можно построить линейный квазипорядок. Расположим альтернативы в соответствии с этим порядком, т. е. сначала идут k эквивалентных альтернатив, которые доминируют над всеми остальными альтернативами множества Y , затем

k_1 альтернатив, над которыми доминируют первые k альтернатив, но эти k_1 альтернатив доминируют над всеми остальными альтернативами множества Y и т. д. Очевидно, что матрица $A_{\text{опт.}}$, построенная для альтернатив множества Y , расположенных указанным образом, не будет содержать элементов, равных -1 в наддиагональной части матрицы, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Если отношение R , установленное на множестве Y , транзитивно, то для соответствующей матрицы $A_{\text{опт.}}$ выполняются условия 1) – 4) утверждения 1.

Доказательство 1. Если в матрице $A_{\text{опт.}}$ $\exists a_{ij} = -1$, то, следовательно, этот элемент не может быть устранен изменением последовательности альтернатив в множестве Y , а, согласно утверждению 2, это противоречит транзитивности отношения R .

2. Пусть $a_{i, i+1} = 1$, а $a_{i-1, i+1} = 1/2$, тогда для того, чтобы в матрице $A_{\text{опт.}}$ не было минора вида F_2 необходимо, чтобы $a_{i-1, i} = -1$, но в наддиагональной части матрицы $A_{\text{опт.}}$ отрицательных элементов нет.

3. Пусть $a_{i-1, i} = 1/2$ и $a_{i, i+1} = 1/2$, а элемент $a_{i-1, i+1} = 1$ или $a_{i-1, i+1} = -1$. Тогда в матрице $A_{\text{опт.}}$ существует минор 2-го порядка вида F_1 и, следовательно, отношение R нетранзитивно.

4. Пусть не выполнено условие 4) утверждения 1, т. е. $a_{ji} = 1/2$, $j = i-l, i-1$ и $\exists k (i-l \leq k \leq i-2)$ и $\exists m (L+1 \leq m \leq i-1)$, что $a_{km} = 1$, то $a_{ki} = 1/2$; $a_{mi} = 1/2$, а $a_{km} = 1$ – получаем минор второго порядка типа F_2 , и, следовательно, отношение R – транзитивно.

Определим для каждой альтернативы $\alpha_i \in Y$ показатель β_i – число альтернатив множества Y , эквивалентных и менее предпочтительных, чем α_i (т. е. число $\alpha_i \in Y$, таких, что либо $(\alpha_i, \alpha_j) \in I$, либо $(\alpha_i, \alpha_j) \in P$).

Упорядочим по убыванию значений β_i ($i = \overline{1, L}$) альтернативы в множестве Y и построим матрицу A для данной последовательности альтернатив. Выделим группы вершин с одинаковыми значениями β_i и перебором определим тот, при котором число отрицательных элементов наддиагональной части матрицы A было бы минимально. Очевидно, что устранение в этой матрице элементов, противоречащих условиям 1) – 4) утверждения 1 приведет к устранению нарушений нетранзитивности отношения R . Сначала предъявляем ЛПР те пары альтернатив множества Y , которым соответствуют отрицательные элементы в матрице A . При изменении отношения между этими альтернативами пересчитываются значения и перестраивается матрица A . Если отрицательных элементов нет, то повторным способом сравнения некоторых пар альтернатив попытаемся последовательно исключать элементы матрицы A , нарушающие условия 2) – 4) матрицы A .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство утверждения

Согласно следствию из теоремы 3.7 [21], если каждая пара критериев не зависит по предпочтению от своего дополнения, то критерии взаимонезависимы по предпочтению. Следовательно, согласно теореме 3.6 [21], существует аддитивная

функция ценности $v(\bar{\alpha}_i) = \sum_{q=1}^Q v_q(\alpha_{iq})$ для критериев множества Q .

Пусть у нас имеется альтернатива $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iQ}) \in Y$ и альтернатива $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jQ}) \in Y$. При этом для каждой, отличной от первой, компоненты вектора α_j существует такая своя отличная от первой компонента вектора α_i , которая при прочих первых оценках по другим критериям не более предпочтительна, чем данная оценка вектора α_i . Пусть для определенности:

$$(1) \quad (\alpha_{i1}, 1, \dots, 1) \quad R_1(1, \alpha_{j2}, 1, \dots, 1),$$

$$(2) \quad (1, \alpha_{i2}, \dots, 1) \quad R_1(1, 1, \alpha_{j3}, \dots, 1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(3) \quad (1, 1, \dots, \alpha_{i, Q-1}, 1) \quad R_1(1, 1, 1, \dots, \alpha_{jQ}),$$

$$(4) \quad (1, 1, \dots, 1, \alpha_{iQ}) \quad R_1(\alpha_{j1}, 1, 1, \dots, 1).$$

(1) означает, что $v_1(\alpha_{i1}) + v_2(1) + \dots + v_Q(1) \geq v_1(1) + v_2(\alpha_{j2}) + \dots + v_Q(1) \Rightarrow v_1(\alpha_{i1}) + v_2(1) \geq v_1(1) + v_2(\alpha_{j2})$, (2) означает, что $v_1(1) + v_2(\alpha_{i2}) + v_3(1) + \dots + v_Q(1) \geq v_1(1) + v_2(1) + v_3(\alpha_{j3}) + v_4(1) + \dots + v_Q(1) \Rightarrow v_2(\alpha_{i2}) + v_3(1) \geq v_2(1) + v_3(\alpha_{j3})$ и т. д.

Сложим правые и левые части производных неравенств.

Получаем:

$$\begin{aligned} & v_1(\alpha_{i1}) + v_2(1) + v_2(\alpha_{i2}) + v_3(1) + \dots + v_{Q-1}(\alpha_{i, Q-1}) + v_Q(1) + \\ & + v_Q(\alpha_{iQ}) + v_1(1) \geq v_1(1) + v_2(\alpha_{j2}) + v_2(1) + v_3(\alpha_{j3}) + \dots \\ & \dots + v_{Q-1}(1) + v_Q(\alpha_{jQ}) + v_Q(1) + v_1(\alpha_{j1}). \end{aligned}$$

Сокращая одинаковые элементы, имеем

$$v_1(\alpha_{i1}) + v_2(\alpha_{i2}) + \dots + v_Q(\alpha_{iQ}) \geq v_1(\alpha_{j1}) + v_2(\alpha_{j2}) + \dots + v_Q(\alpha_{jQ}),$$

т. е. $v(\alpha_i) \geq v(\alpha_j) \Rightarrow \alpha_i$ не менее предпочтительна, чем α_j , что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларичев О. И., Зуев Ю. А., Гнеденко Л. С. Метод построения классификации проектов проведения прикладных научных исследований и разработок. – В кн.: Пер-

- спективное планирование научных исследований и разработок. М.: Наука, 1974, с. 28–57.
2. Ларичев О. И., Зуев Ю. А., Гнеденко Л. С. Метод ЗАПРОС (Замкнутые ПРОцедуры у Опорных Ситуаций) решения слабоструктуризованных проблем выбора при многих критериях. Препринт. М.: ВНИИСИ, 1979.
 3. Ларичев О. И. О возможностях человека в задачах принятия индивидуальных решений при многих критериях. — В кн.: Проблемы и методы принятия решений в организационных системах управления. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 5–12.
 4. Фишберн П. К. Теория полезности для принятия решений. М.: Мир, 1982.
 5. Keeney R. L. Utility Independence and Preference for Multiattributed Consequences. — Oper. Res., 1974, No. 19, p. 875–893.
 6. Fishburn P. C. Independence Utility Theory with Whole Product sets. — Oper. Res., 1965, № 13, p. 28–45.
 7. Keeney R. L. Utility Functions for Multiattributed Consequences. — Manag. Sci., 1972, No. 18, p. 276–287.
 8. Keeney R. L. Energy Policy and Value Trade-offs. — IASA, Res. Mem., RM-75–76, 1975.
 9. Миркин Б. Г. Проблемы группового выбора. М.: Наука, 1974.
 10. Ларичев О. И. Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979.
 11. Ларичев О. И., Мошкович Е. М. О возможностях получения от человека непротиворечивых оценок многомерных альтернатив. — В кн.: Дескриптивный подход к изучению процессов принятия решений при многих критериях. М.: ВНИИСИ, 1980, с. 58–67.
 12. Ларичев О. И., Бойченко В. С., Мошкович Е. М., Шенгалова Л. П. Проблемы выявления предпочтений лиц, принимающих решения при бинарной оценке альтернатив и двоичных оценках на шкалах критериев. — В кн. Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем. М.: ВНИИСИ, 1978, с. 61–77.
 13. Мошкович Е. М. Линейные и нелинейные дескриптивные модели. — В кн.: Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем. М.: ВНИИСИ, 1978, с. 52–61.
 14. Ларичев О. И. Методы многокритериальной оценки альтернатив. — В кн.: Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем. М.: ВНИИСИ, 1978, с. 5–30.
 15. Tversky A. Intransitivity of Preferences. — Psychological Rev., 1969, No. 76, p. 31–48.
 16. Hoffman P. J., Slovic P., Rorer L. G. Analysis — of — variance model for the assessment of configural cue utilization in clinical judgment. — Psychological Bulletin, 1968, No. 69, p. 338–349.
 17. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
 18. Озерной В. М., Гафт М. Г. Построение решающих правил в многокритериальных задачах принятия решений. — В кн.: Проблемы принятия решений. М.: Ин-т проблем управления, 1974, с. 30–34.
 19. Ларичев О. И., Зуев Ю. А., Гнеденко Л. С. Метод построения классификации проектов проведения прикладных научных исследований и разработок. — В кн.: Перспективное планирование научных исследований и разработок. М.: Наука, 1974, с. 28–77.
 20. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
 21. Фуремс Е. М., Мошкович Е. М. Упорядочение векторных оценок для задачи формирования «портфеля заказов». — В кн.: Процедуры оценивания многокритериальных объектов. М.: ВНИИСИ, 1984, вып. 9, с. 41–53.
 22. Диниц Е. А., Кропрод М. А. Один алгоритм решения задачи о назначении. — Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 1, с. 23–25.
 23. Берж К. Теория графов и ее применения. М.: Изд-во Иностран. лит. 1962.
 24. Пригарина Т. А., Шмерлинг Д. С. Об одном подходе к оценке согласованности предпочтений эксперта в парных сравнениях, допускающих неразличение объектов. — В кн.: Тез. докл. III Всесоюз. науч. школы «Прогнозирование научно-технического прогресса». Ч. I, Минск, 1979, с. 178–180.

Поступила в редакцию
30.IX.1985

DESIGN OF A QUASI ORDER ON A SET OF MULTICRITERIAL OPTIONS DICTATED BY CREDIBLE KNOWLEDGE OF THE DECISION MAKER'S PREFERENCES

GNEDENKO L. S., LARICHEV O. I., MOSHKOVICH Ye. M., FUREMS Ye. M.

On a set of vector-valued estimates by performance criteria of a binary preference — indifference relation is obtained which is a quasi-order in a general case. Basic requirements to be met by the solution methods presume the use of only the kind of data which the decision maker can fairly easily provide. The method should provide for checking the consistency of this data and include an effective procedure for elimination of possible contradictions. An algorithmical quasi-order design procedure which meets these requirements presumes independence of the criteria (to be checked) and transitivity of the desired relation.