Автоматика и телемеханика, № 1, 2007

Моделирование поведения и интеллекта

PACS 02.50.Le

© 2007 г. Ф.Т. АЛЕСКЕРОВ, д-р техн. наук
(Государственный университет – Высшая школа экономики,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Д.А. ЮЗБАШЕВ,
В.И. ЯКУБА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОРОГОВОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ ТРЕХГРАДАЦИОННЫХ РАНЖИРОВОК

Рассматривается задача аксиоматического построения результирующего ранжирования в многокритериальной задаче при условии, что значения критериев имеют только три градации. Показано, что единственным правилом, удовлетворяющим введенной системе аксиом, является пороговое правило.

1. Введение

В прикладных задачах объекты часто оцениваются по критериям в терминах "плохо – средне – хорошо", т.е. ранжируются с только лишь тремя рангами. С другой стороны, в ряде задач использование линейных сверток критериев представляется необоснованным в силу их "компенсаторного" характера. Иначе говоря, при использовании линейной свертки критериев низкие оценки по одному критерию могут компенсироваться высокими оценками по другим критериям. В работе предлагается метод построения результирующего ранжирования для оценок по совокупности критериев, представленных ранжировками с тремя рангами. Приводится аксиоматическое обоснование построенного метода. Показано, что единственной процедурой, которая удовлетворяет введенной системе аксиом, является пороговое правило, по которому строится бинарное отношение, определяющее предпочтения на множестве объектов.

2. Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим конечное множество A альтернатив, оцениваемых по n критериям, т.е. каждой альтернативе x из A ставится в соответствие вектор $(x_1, \dots, x_n)$, причем $x_j \in \{1, 2, 3\}$. Множество A состоит из всех возможных векторов такого вида.

Задача состоит в построении преобразования φ – правила агрегирования на A – такого, что

$$\varphi : A \to R^1.$$

Предполагается, что процедура φ не зависит от размерности множества A: она может быть распространена на любое $(n-1)$-мерное подмножество A. Также вводится обозначение φ_k, где k указывает на размерность пространства, в котором оперирует процедура.

Предполагается также, что преобразование φ_k удовлетворяет ряду специальных аксиом:

1. **Парето-доминирование:**

$$\forall x, y \in A \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \geq y_i \text{ и } \exists i_0 : \ x_{i_0} > y_{i_0} \Rightarrow \varphi_n(x) > \varphi_n(y),$$

т.е. если координаты вектора x не меньше координат вектора y и есть хотя бы одна координата в x, которая строго больше соответствующей координаты в y, то агрегированное значение для вектора x будет строго больше, чем для вектора y.

2. **Попарная компенсируемость критериев:**

$$\forall x, y \in A \ \exists i, j \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_j \wedge x_j = y_i \text{ и } \forall k \neq i, j \ \ x_k = y_k \ \Rightarrow \varphi_n(x) = \varphi_n(y)$$

т.е. если все координаты векторов x и y, кроме некоторых двух, равны, а в неравной паре координат значения в x и y "взаимно обратные", то агрегированные значения для таких векторов будут равны.

3. **Пороговая некомпенсируемость:**

$$\forall x \in A, \quad \varphi_n(2, \ldots, 2) > \varphi_n(x),$$

где $x : \exists i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $x_{i_0} = 1$.

Иначе говоря, если хотя бы одна координата в векторе x равна 1, то его агрегированное значение будет всегда меньше агрегированного значения вектора вида $(2, \ldots, 2)$.

Именно в этом и состоит пороговая модель агрегирования: даже если у какого-то вектора все компоненты, кроме одной (равной 1), равны 3, то его агрегированное значение будет меньше агрегированного значения вектора, имеющего все "средние" оценки. Иначе говоря, даже высокие оценки по всем остальным критериям не компенсируют очень низкого уровня оценки по другому критерию, а роль "порога" в данной модели играет вектор (2, …,2).

4. **Аксиома редукции:**

$$\begin{aligned}&\forall x, y \in A, \quad \exists i \ x_i = y_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi_n(x) > \varphi_n(y) \Leftrightarrow \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) > \\ &> \varphi_{n-1}(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n).\end{aligned}$$

При $n = 2$ (не ограничивая общности, положим $i = 1$) $\varphi_2(x) > \varphi_2(y) \Leftrightarrow x_2 > y_2$, т.е. если в двух векторах x и y значения по одной из координат равны, то эту координату можно не учитывать в решении вопроса о взаимном предпочтении этих векторов.

Обозначим через $W_{tresh} \subseteq A \times A$ бинарное отношение, которое строится на множестве A следующим образом:

$$W_{tresh} = \{(x, y) \mid v_1(x) < v_1(y) \text{ или } v_1(x) = v_1(y) \text{ и } v_2(x) < v_2(y)\},$$

где $v_1(x)$ – число единиц ("1") в записи вектора x, а $v_2(x)$ – соответственно число двоек ("2"). Правило построения бинарного отношения W_{tresh}, назовем пороговым правилом. Отношение W_{tresh} представляет собой множество пар векторов, для которых выполняется одно из двух условий: либо в первом векторе число единиц меньше, чем во втором, либо – при совпадении числа единиц – в первом векторе число двоек меньше, чем во втором.

Иначе говоря, пороговое правило в таком случае сравнивает сначала альтернативы по числу оценок "плохо" ("1"), и если их число совпадает, то по числу оценок "средне" ("2").

Можно доказать, что отношение W_{tresh}, которое строится пороговым правилом, является на R^1 слабым порядком, т.е. антирефлексивным ($(x, x) \notin W_{tresh}$), транзитивным $((x,y)\in W_{tresh},\ (y,z)\in W_{tresh}\Rightarrow (x,z)\in W_{tresh})$ и отрицательно транзитивным $((x,y)\notin W_{tresh},\ (y,z)\notin W_{tresh}\Rightarrow (x,z)\notin W_{tresh})$ отношением.

Каждый слабый порядок P определяется однозначно множеством классов эквивалентности, так что $xPy\Leftrightarrow x\in I_i^P,\ y\in I_l^P$ и $i>l$, где

$$\begin{aligned}&I_s^P=\{x\in A\mid \neg\exists y\in A: yPx\},\\&I_{s-1}^P=\{x\in A\backslash I_s\mid \neg\exists y\in A: yPx\},\\&\dots\\&I_1^P=A\backslash\bigcup_{j=2}^{s}I_j.\end{aligned}$$

Будем рассматривать процедуру φ на множестве A векторов размерности n.

Т е о р е м а. *Преобразование $\varphi: A\to R^1$, удовлетворяющее аксиомам $1-4$, определяется системой классов эквивалентности слабого порядка, порождаемого пороговым правилом, т.е.*

$$\varphi(x)>\varphi(y)\Leftrightarrow x\in I_k^{W_{tresh}},\quad y\in I_j^{W_{tresh}}\quad \text{и}\quad k>j.$$

Задача вычисления максимально возможного числа классов эквивалентности этого слабого порядка при длине векторов, равной n, и при значении компонент вектора из $\{1,2,3\}$ сводится к расчету числа неупорядоченных n-выборок из k элементов с повторением (сочетаний с повторением) [1], где $k=3$, а n – длина вектора,

$$C_{n+3-1}^n=\frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что максимальное значение функции φ равно $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

3. Обзор литературы

Модель, которая исследуется в настоящей работе, была предложена в [2]. В ней были сформулированы аксиомы такого же типа, как и используемые здесь, и было показано (с использованием представления о близости векторов в терминах некоторой псевдометрики), что агрегирующая процедура представляет собой пороговое правило. Таким образом, здесь получено прямое доказательство теоремы из [2] при несколько видоизмененных аксиомах.

В [3] исследовалась задача о свойствах порядковых отношений, в которой было показано, что большинство результатов, полученных в R^n для этих отношений, переносятся на произвольные пространства с критериями, принимающими не менее трех значений. Однако, насколько известно авторам, задача аксиоматического построения агрегирующего порогового правила ранее не рассматривалась.

В [4] рассматривается метод, который автор называет "методом оценочных голосований". Участники выражают свои мнения, используя трехградационую шкалу $\{-1,0,1\}$, а процедура агрегирования представляет собой суммирование оценок альтернатив. Автор предлагает в словесной форме ряд аксиом, которым удовлетворяет данная процедура.

Другая характеризация для трехградационных ранжировок дана в [5]. Процедура агрегирования ограничивается системой стандартных аксиом (см., например, [6]) и показано, что процедура агрегирования является некоторой версией правила относительного большинства.

Представляет интерес обобщение построенной модели для случая, когда число градаций критериев превышает 3. Здесь возникает много возможных версий аксиомы пороговой некомпенсируемости. Задачи, в которых исследуются подобные подходы, известны в моделях так называемой "свободы принятия решений" (см., например, [7, 8] и моделях манипулирования при множественных предпочтениях (см., например, [9]).

4. Заключение

Приведем в заключение две практические задачи, в которых использовалась построенная модель порогового агрегирования.

В Центре исследования политических процессов Института проблем управления РАН создана система оценки удовлетворенности населения деятельностью областной администрации. В системе трехградационная модель агрегирования параметров применяется для расчета индексов "Качество инфраструктуры" и "Качество образования/отдыха".

Качество инфраструктуры вычисляется по следующим параметрам: степень обустройства территории, обеспеченность дорогами, обеспеченность газом/отоплением, обеспеченность электричеством, обеспеченность водой/канализацией, обеспеченность телефоном.

Качество образования/отдыха вычисляется по следующим параметрам: обеспеченность школами, обеспеченность дошкольными учреждениями, обеспеченность культурно-просветительскими учреждениями, обеспеченность предприятиями и местами отдыха.

Каждый из исходных параметров принимает значения "хорошо", "средне", "плохо", а необходимость именно порогового агрегирования исходных оценок связана с интуитивным допущением о некомпенсируемости для любого параметра значения "плохо".

Второе использование метода было проведено в задаче внутристранового исследования развитости гражданского общества. Был проведен выборочный опрос городского населения по четырем показателям, одним из которых была "политическая среда".

Оценки этого параметра производились на основании ответов на следующие вопросы:

1. Сильно ли ограничиваются Ваши гражданские или политические права и свободы? (полностью ограничиваются, умеренно ограничиваются, не ограничиваются).

2. Как Вы считаете, сильно ли коррумпирован чиновничий аппарат в Вашем городе? (полностью коррумпирован, частично коррумпирован, не коррумпирован).

3. Как часто Вы (или Вам) давали взятку? (часто, редко, никогда).

Ответы на вопросы давались по шкале $\{1, 2, 3\}$ (соответственно "плохо", "средне", "хорошо"), а агрегирование проводилось с использованием описанного порогового правила.

Авторы выражают глубокую благодарность Р.П. Агаеву и П.Ю. Чеботареву за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы использует две леммы. Эти доказательства основываются во многом на процедуре упорядочивания значений критериев внутри вектора: слева направо в записи вектора последовательно располагаются единицы, потом двойки, затем тройки. Такое упорядочивание является эквивалентным преобразованием в силу аксиомы попарной компенсируемости критериев, примененной многократно к исходному вектору.

Лемма 1. Если $v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Доказательство. Из условия, очевидно, следует, что x и y имеют одинаковые наборы, тогда, используя аксиому попарной компенсируемости критериев, можно перестановками преобразовать вектор x к виду вектора y. Следовательно, значения на этих векторах также будут совпадать.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $v_1(x) = v_1(y)$.

Доказательство. Пусть $\nu_1(x) < \nu_1(y)$. Тогда можем ввести в рассмотрение пару векторов x' и y', каждый из которых является перестановкой соответственно x и y так, что x': $(1, 1, \ldots, 1 \mid *, * \ldots, *)$, где вертикальная черта разделяет позиции $k = \nu_1(x)$ и $(k+1)$, а на месте звездочек стоят "2" или "3" (нет единиц); $y' : (1, 1, \ldots, 1 \mid 1, \ldots, 1, \mid *, \ldots, *)$, где вторая вертикальная черта отделяет $l = \nu_1(y)$ от $l+1$, а после l-й позиции стоят также "2" и "3".

Построим вектор z, такой что

$$z : (1, 1, \ldots, 1 \mid 2, 2, \ldots, 2).$$

Тогда $\varphi(x') \geq \varphi(z)$ по правилу Парето. По аксиоме редукции можно рассматривать только "укороченные" векторы – анализировать только те позиции, которые находятся "после первой вертикальной черты", и тогда, используя аксиому пороговой некомпенсируемости, можно получить

$$\varphi(x) = \varphi(x') \geq \varphi(z) > \varphi(y') = \varphi(y).$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Доказательство теоремы. Необходимо доказать следующее соотношение:

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow v_1(x) < v_1(y) \vee v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y).$$

Достаточность докажем от противного.

Пусть $\exists x, y: \ (v_1(x) < v_1(y) \ \vee \ v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)) \ \wedge \ \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Рассмотрим два случая:

а) $v_1(x) < v_1(y)$. Используя перестановки (которые не нарушают условия $v_1(x) < < v_1(y)$, они всегда существуют в силу аксиомы попарной компенсируемости), преобразуем x в x', y – в y' так, что $k = v_1(x)$ и первые k позиций в x' – единицы, т.е. $x'_1 = 1, \ldots, x'_k = 1$, а $l = v_1(y)$: первые l позиций в y' – единицы, т.е. $y'_1 = 1, \ldots, y'_l = 1$ и $l > k$ (см. доказательство леммы 2). Здесь на позициях с $(k+1)$ по n в векторе x' стоят числа, большие или равные двум. А в векторе y' такие числа "начинаются" лишь с $(l+1)$ позиции, причем $(l > k)$. Введем в рассмотрение вектор z, у которого первые k позиций – единицы, как и в x, а затем (с $k+1$ по n) все "2". В этом случае, по аксиоме редукции можно рассматривать лишь "укороченные" на первые k позиций вектора x', y' и z. В результате, по аксиомам получаем: $\varphi(x) = \varphi(x') \geq \varphi(z) > \varphi(y') = \varphi(y)$, первое неравенство – по Парето, второе – в силу некомпенсируемости значения "1", откуда следует $\varphi(x) > \varphi(y)$, т.е. получено противоречие;

б) $v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)$.

Снова переставляем:

$$x \to x' = (1, \ldots, 1 \mid 2, \ldots, 2 \mid 3, \ldots, 3 \mid 3, \ldots, 3).$$
$$y \to y' = (1, \ldots, 1 \mid 2, \ldots, 2 \mid 2, \ldots, 2 \mid 3, \ldots, 3).$$

Здесь следует отметить, что единиц в обоих векторах x и y и двоек только в x может не быть.

По аксиоме Парето-доминирования имеем: $\varphi(x) = \varphi(x') > \varphi(y') = \varphi(y)$, опять получено противоречие.

Необходимость. Надо доказать, что

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Rightarrow \; v_1(x) < v_1(y) \; \vee \; v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y).$$

Отрицанием отношения "равно" для любых двух сравниваемых элементов является дизъюнкция отношений "больше" и "меньше". Рассмотрим сначала отношение "больше", взяв отрицание правой части:

$$\begin{aligned}
&\neg\,(v_1(x) < v_1(y) \;\vee\; v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)) = \\
&= v_1(x) \geq v_1(y) \;\wedge\; (v_1(x) \neq v_1(y) \vee v_2(x) \geq v_2(y)) = \\
&= v_1(x) \geq v_1(y) \wedge v_1(x) \neq v_1(y) \;\vee\; v_1(x) \geq v_1(y) \wedge v_2(x) \geq v_2(y) = \\
&= v_1(x) > v_1(y) \;\vee\; v_1(x) > v_1(y) \wedge v_2(x) \geq v_2(y) \;\vee\; v_1(x) = \\
&= v_1(y) \wedge v_2(x) \geq v_2(y) = (v_1(x) > v_1(y) \;\vee\; v_1(x) = \\
&= v_1(y) \wedge v_2(x) > v_2(y)) \;\vee\; (v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y)).
\end{aligned}$$

Аналогично рассматривая отношение "меньше", также получим, что выражение во вторых скобках является симметричным относительно переменных, т.е. можно рассматривать только одно из отношений, например "больше", так как всегда можно переименовать переменные.

Так как известно, что $v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y) \;\Rightarrow\; \varphi(x) = \varphi(y)$ (лемма 1), то от противного получим:

$$\neg(\varphi(x) = \varphi(y)) \Rightarrow \; \neg(v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y)),$$

или

$$\varphi(x) > \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad (v_1(x) < v_1(y) \;\vee\; v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)).$$

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.
2. *Алескеров Ф., Якуба В.* Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида // II Междунар. конф. по пробл. упр. Тез. докл., ИПУ РАН, Москва, 2003. С. 116.
3. *Шоломов Л.А.* Логические методы исследования отношений в критериальных пространствах с порядковыми шкалами произвольного вида // АиТ. 2004. № 5. С. 115–125.
4. *Hillinger C.* Voting and the cardinal aggregation of judgements // University of Munich Discussion Paper, 2004.
5. *Ju Biung-Ghi.* An efficiency characterization of plurality social choice on simple preference domains // Economic Theory. 2005. V. 26. № 1. P. 115–128.
6. *Aleskerov F.* Categories of Arrovian Voting Schemes / Handbook of Economics 19, Handbook of Social Choice and Welfare. V. 1. Ed. K.Arrow, A.Sen, K.Suzumura, Elsevier Science B.V. 2002. P. 95–129.
7. *Pattanaik P., Xu Y.* On Preferences and Freedom // Theory and Decision. 1998. V. 44. P. 173–198.
8. *Sen A.* Freedom of Choice: Concept and Content // Eur. Econom. Rev. 1988. V. 32. P. 269–294.
9. *Özyurt S., Sanver M.R.* A general impossibility result on strategyproof social choice hyperfunctions // J. Econom. Theory (submitted).

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ю.С. Попковым.

Поступила в редакцию 01.06.2005